Jeans不安定性, Toomre Q parameter

update:01/Jan/2012, presented by Sho Nakamura

Jeans不安定性、線形解析

無限一様に広がって静止している流体を考える。このとき系は平衡状態にあり、そのときの密度・圧力・速度場、自己重力場をそれぞれ $\rho = \rho_0 = \mathrm{uniform}, p = p_0 = \mathrm{uniform}, \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \Phi = \Phi_0$ とする。これらは流体の基礎方程式

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \mathbf{v}_0) + \nabla(\rho_0 \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0) = -\nabla p_0 - \rho_0 \nabla \Phi_0 \underbrace{=}_{p_0=\mathrm{uniform}} -\rho_0 \nabla \Phi_0 = 0 \implies \nabla \Phi_0 = 0 \tag{2}$$

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0 \tag{3}$$

を満たしている。ここに微小な摂動が加わり、物理量がそれぞれ

$$\rho = \rho_0 + \rho_1,\ \ p = p_0 + p_1,\ \ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1,\ \ \Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \tag{4}$$

に変化したとする。またこの摂動は断熱的に起こるものとし、

$$p = K\rho^\gamma \implies K = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{p_0 + p_1}{(\rho_0 + \rho_1)^\gamma} \underbrace{\simeq}_{\frac{\rho_1}{\rho_0}\text{の 1 次まで}} \frac{p_0 + p_1}{\rho_0^\gamma}\left(1 - \gamma\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} + \frac{p_1}{\rho_0^\gamma} - \gamma\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma+1}}\rho_1 \implies p_1 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\rho_1 = C_s^2 \rho_1 \tag{5}$$

$C_s = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ は断熱状態での音速であり、今は $\rho_0 = \mathrm{uniform}, p_0 = \mathrm{uniform}$ より定数である。
流体の基礎方程式より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1) + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1 + \underbrace{\rho_1 \mathbf{v}_1}_{2\text{ 次の微少量}}) \underbrace{=}_{(1)} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) \underbrace{=}_{\rho_0=\mathrm{uniform}} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \mathbf{v}_1 + \underbrace{\rho_1 \mathbf{v}_1}_{\text{微小}}) + \nabla\{(\rho_0 + \rho_1)\underbrace{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1}_{\text{微少}}\} \overbrace{=}^{(1)} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla(p_0 + p_1) - (\rho_0 + \rho_1)\nabla(\Phi_0 + \Phi_1) \\
&\overbrace{=}^{p_0=\mathrm{uniform}} -\nabla \overbrace{p_1}^{(5)} \underbrace{-\rho_0 \nabla \Phi_0}_{(2)} - \rho_0 \nabla \Phi_1 - \rho_1 \overbrace{\nabla \Phi_0}^{(2)} - \underbrace{\rho_1 \nabla \Phi_1}_{\text{微小}} = -C_s^2 \nabla \rho_1 - \rho_0 \nabla \Phi_1 \\
&\implies \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -C_s^2 \nabla \rho_1 - \rho_0 \nabla \Phi_1
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\nabla^2(\Phi_0 + \Phi_1) = 4\pi G(\rho_0 + \rho_1) \underbrace{\implies}_{(3)} \nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(6) \implies \underbrace{\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{v}_1)}_{\nabla\cdot(7)} = -\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = -C_s^2 \nabla^2 \rho_1 - \rho_0 \underbrace{\nabla^2 \Phi_1}_{(8)} = -C_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 \tag{9}$$

$\rho_1 \propto e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$ として 1 つの Fourie 成分に着目すると

$$\omega^2\rho_1 = C_s^2 k^2 \rho_1 - 4\pi G\rho_0\rho_1 \implies \omega^2 = k^2 C_s^2 - 4\pi G\rho_0 \tag{10}$$

となり、分散関係式を求めることができた。不安定な波数は

$$k < \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{C_s^2}} \equiv k_J = \frac{2\pi}{\lambda_J} \tag{11}$$

特に λ_J を Jeans 波長と呼び、この波長より大きな揺らぎは自己重力が圧力の増加より勝り、重力収縮を起こす。この λ_J 程度の波長のゆらぎに含まれる質量を大雑把に球として考えると

$$M_J \equiv \frac{4\pi}{3}\lambda_J^3\rho_0 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\pi C_s^2}{G\rho_0}\right)^{3/2}\rho_0 \propto T^{3/2}n^{-1/2} \tag{12}$$

ここでは理想気体として $C_s^2 = \gamma p_0/\rho_0 \propto T$ とした。M_J を Jeans mass と呼び、自己重力により $M > M_J$ の天体が形成される。Jeans mass は温度が低く密度が高いほど小さいため、重力収縮に伴う密度増加により Jeans 波長が小さくなり、より小さい塊へと分裂することが知られている。これを flagmentation という。

Jeans 不安定性、直感的理解

流体が自己重力によって収縮を始めようとするのを、圧力増加 (音波による密度ムラのならし) によって食い止めてしまえば、Jeans 不安定にはならない。よって Jeans 不安定性が起こる条件は

$$\begin{aligned}&\text{重力により 1 点に集まろうとするのにかかる時間 (free − fall time scale) } \tau_{\text{ff}}\\ &\quad < \text{音波による振動で系全体をならすのにかかる時間 (soud − crossing time scale)}\tau_{\text{sc}}\end{aligned} \tag{13}$$

と考えることができる。

$$\rho\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}\rho \implies \frac{R}{\tau_{\text{ff}}^2} \simeq \frac{G\frac{4\pi}{3}R^3\rho}{R^2} \implies \tau_{\text{ff}} \simeq \sqrt{\frac{1}{G\rho}} \tag{14}$$

$$\rho\frac{d^2R}{dt^2} = -\nabla p \implies \frac{R}{\tau_{\text{sc}}^2} \simeq \frac{1}{R}\frac{p}{\rho} \simeq \frac{C_s^2}{R} \implies \tau_{\text{sc}} \simeq \frac{R}{C_s} \tag{15}$$

$$\therefore \tau_{\text{ff}} < \tau_{\text{sc}} \implies \sqrt{\frac{1}{G\rho}} < \frac{R}{C_s} \implies R > \sqrt{\frac{C_s^2}{G\rho}} \simeq \lambda_J \tag{16}$$

となり、確かに Jeans 波長程度より大きな揺らぎは自己重力により成長していく、という上述と同じ結果を得る。

回転平板の自己重力不安定性

今度は $z=0$ 平面にのみガスが分布し、平板が角速度 $\mathbf{\Omega}=\Omega\mathbf{e}_z$ で回転しているとしよう。面密度や速度場をそれぞれ

$$\Sigma(x,y)=\int\rho(x,y,z)dz,\ \ \mathbf{v}(x,y)=\frac{1}{\Sigma}\int\rho(x,y,z)\mathbf{v}(x,y,z)dz \tag{17}$$

と定義する。
初期状態では、流体は静止しており、面密度も一様であるとする。すなわち $\Sigma=\Sigma_0=\mathrm{uniform}, p=p_0=\mathrm{uniform}, \mathbf{v}=\mathbf{v}_0=\mathbf{0}, \Phi=\Phi_0$ とすると

$$\frac{\partial\Sigma_0}{\partial t}+\nabla\cdot(\Sigma_0\mathbf{v}_0)=\frac{\partial\Sigma_0}{\partial t}=0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma_0\mathbf{v}_0)+\nabla(\Sigma_0\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0)=-\nabla p_0-\Sigma_0\nabla\Phi_0-2\Sigma_0\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}_0+\Sigma_0\Omega^2(x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y)=-\Sigma_0\nabla\Phi_0+\Sigma_0\Omega^2(x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y)=0 \tag{19}$$

$$\nabla^2\Phi_0=4\pi G\Sigma_0\delta(z) \tag{20}$$

Φ_0 は (20) 式の両辺を z 方向微小区間 $[-\epsilon:\epsilon]$ で積分することで

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}(\epsilon)-\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}(-\epsilon)=2\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}(\epsilon)=4\pi G\Sigma_0\ \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{さらに } z \text{ 積分}}\ \Phi_0(x,y,z)=2\pi G\Sigma_0|z|+(x,y\text{ の関数}) \tag{21}$$

となる。途中、$z=0$ を挟んで対称な系であることから $\partial\Phi/\partial z(-\epsilon)=-\partial\Phi/\partial z(\epsilon)$ を用いた。また Φ_0 は (19) 式も満たさなくてはならない。もっとも簡単な形として

$$\Phi_0(x,y,z)=2\pi G\Sigma_0|z|+\frac{\Omega^2}{2}(x^2+y^2) \tag{22}$$

としておこう。ここに微小な摂動が加わり、物理量がそれぞれ

$$\Sigma=\Sigma_0+\Sigma_1, p=p_0+p_1, \mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_1, \Phi=\Phi_0+\Phi_1 \tag{23}$$

に変化したとする。Jeans 不安定のときと同様に、この摂動は断熱的に起こっているとすると

$$p_1=C_s^2\Sigma_1 \tag{24}$$

のように書ける。C_s^2 は無摂動状態のときの音速より定数である。流体力学基礎方程式より

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma_0+\Sigma_1)+\nabla\cdot\{(\Sigma_0+\Sigma_1)\mathbf{v}_1\}\underbrace{=}_{(18)}\frac{\partial\Sigma_1}{\partial t}+\nabla\cdot(\Sigma_0\mathbf{v}_1)\overbrace{=}^{\Sigma_0=\mathrm{uniform}}\frac{\partial\Sigma_1}{\partial t}+\Sigma_0\nabla\cdot\mathbf{v}_1=0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\{(\Sigma_0+\Sigma_1)\mathbf{v}_1\}+\nabla\{(\Sigma_0+\Sigma_1)\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1\}\\ &\underbrace{=}_{(18)}\Sigma_0\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial t}=-\nabla(p_0+p_1)-(\Sigma_0+\Sigma_1)\nabla(\Phi_0+\Phi_1)-2(\Sigma_0+\Sigma_1)\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}_1+(\Sigma_0+\Sigma_1)\Omega^2(x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y)\end{aligned}$$

$$= -\nabla \overbrace{p_1}^{(24)} \underbrace{-(\Sigma_0 + \Sigma_1)\nabla\Phi_0 + (\Sigma_0 + \Sigma_1)\Omega^2(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)}_{(19)\text{ より }\mathbf{0}} - \Sigma_0\nabla\Phi_1 - 2\Sigma_0\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_1$$

$$\Longrightarrow \Sigma_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -C_s^2 \nabla\Sigma_1 - \Sigma_0\nabla\Phi_1 - 2\Sigma_0\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_1 \tag{26}$$

$$\nabla^2(\Phi_0 + \Phi_1) = 4\pi G(\Sigma_0 + \Sigma_1)\delta(z) \Longrightarrow \nabla^2\Phi_1 = 4\pi G\Sigma_1\delta(z) \tag{27}$$

以下、摂動により加わった微少量の Fourier 成分に着目するため

$$\mathbf{v}_1 = \delta\mathbf{v}e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})},\ \ \Sigma_1 = \delta\Sigma e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})},\ \ \Phi_1 = \delta\Phi e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) - |kz|} \tag{28}$$

とする。$\delta\mathbf{v} = (\delta v_x, \delta v_y, 0)$ である。$\delta\Phi$ はポテンシャルなので、$z \to 0$ で摂動の効果が 0 となるようにしている。(27) 式の両辺を z 方向微小区間 $[-\epsilon : \epsilon]$ で積分し、$\epsilon \to 0$ の極限をとると

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon}\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}\right)dz + \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}dz\right\} = 4\pi G\Sigma_1 \tag{29}$$

左辺第一項は z に関して連続な関数なので $\epsilon \to 0$ の極限では 0 としてよい。

$$\therefore \lim_{\epsilon\to 0}\int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}dz = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}(\epsilon) - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}(-\epsilon)\right) = -2|k|\Phi_1 \tag{30}$$

よって

$$\Phi_1 = -\frac{2\pi G}{|k|}\Sigma_1 \tag{31}$$

以降、簡単のため波数ベクトルを $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$ とする。

$$(25) \Longrightarrow i\omega\Sigma_1 + \Sigma_0(-i\mathbf{k})\cdot\mathbf{v}_1 = 0 \Longrightarrow \omega\delta\Sigma - \Sigma_0 k_x \delta v_x = 0 \tag{32}$$

$$(26) \Longrightarrow \Sigma_0 i\omega\mathbf{v}_1 = -C_s^2(-i\mathbf{k})\Sigma_1 - \Sigma_0\nabla\underbrace{\Phi_1}_{(30)} - 2\Sigma_0\Omega\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_1 = iC_s^2\mathbf{k}\Sigma_1 + \Sigma_0\frac{2\pi G}{k}(-i\mathbf{k})\Sigma_1 - 2\Sigma_0\Omega\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_1$$

$$\Longrightarrow i\omega\begin{pmatrix}\delta v_x \\ \delta v_y\end{pmatrix} + i\left(-\frac{C_s^2}{\Sigma_0} + \frac{2\pi G}{|k|}\right)\begin{pmatrix}k_x \\ 0\end{pmatrix}\delta\Sigma - 2\Omega\begin{pmatrix}-\delta v_y \\ \delta v_x\end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{33}$$

よって固有値方程式

$$\begin{pmatrix}\omega & -\Sigma_0 k_x & 0 \\ i\left\{-\frac{C_s^2}{\Sigma_0} + \frac{2\pi G}{|k|}\right\}k_x & i\omega & 2\Omega \\ 0 & -2\Omega & i\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\Sigma \\ \delta v_x \\ \delta v_y\end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{34}$$

を解けばよいことがわかる。$(\delta\Sigma, \delta v_x, \delta v_y) = \mathbf{0}$ という自明な解以外の解を探すには係数行列の逆行列が存在しなければよい。よって係数行列の行列式を計算する。

$$\omega(-\omega^2+4\Omega^2)+\Sigma_0 k_x\left[i\left\{-\frac{C_s^2}{\Sigma_0}+\frac{2\pi G}{|k|}\right\}k_x i\omega-0\right]=0 \implies (-\omega^2+4\Omega^2)+k_x^2C_s^2-k_x^2\Sigma_0\frac{2\pi G}{|k|}=0$$

$$\implies \omega^2=k_x^2C_s^2+(2\Omega)^2-2\pi G\Sigma_0|k| \tag{35}$$

という分散関係式を得る。回転は摂動を安定化させるはたらきをしていることがわかる。それは回転によるコリオリ力がガスが一カ所に集中しようとするのを妨げるためである。

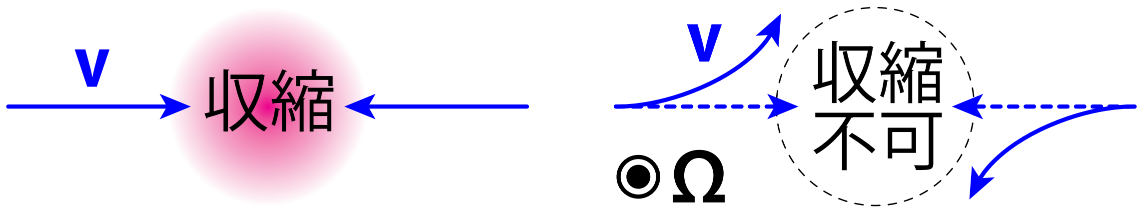

fig 1: 左図:無回転の場合。右図:回転がある場合。コリオリ力により軌道が曲げられ、円盤内の重力収縮を妨げる。

$k_x>0$ のみを考えたときに $\omega^2<0$、すなわち不安定となる波数が存在しないためには

$$\omega^2=C_s^2\left(k_x-\frac{\pi G\Sigma_0}{C_s^2}\right)^2-\frac{\pi^2G^2\Sigma_0^2}{C_s^2}+(2\Omega)^2 \tag{36}$$

のように変形し、k_x の 2 次関数の最小値が 0 より大きければよい。

$$\therefore\ -\frac{\pi^2G^2\Sigma_0^2}{C_s^2}+(2\Omega)^2>0 \implies \frac{2\Omega C_s}{\pi G\Sigma_0}>1 \tag{37}$$

であれば安定であるとわかる。
今までは $\Omega=\mathrm{const}$ と考えてきたが、上式を $2\Omega\to\kappa$ と置き換えることで、一般の差動回転円盤の場合にも適用することができる。κ はエピサイクリック振動数であり

$$Q\equiv\frac{\kappa C_s}{\pi G\Sigma_0}\qquad\left(\kappa^2=\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}(r^4\Omega^2)\right) \tag{38}$$

を Toomre's Q parameter と呼ぶ。$Q>1$ のとき円盤は安定に回転し、$Q<1$ のときは円盤内で流体が自己重力による収縮を起こし、円盤としての形を保てなくなる。

Bibliography

[1] 観山 正見, 野本 憲一, 二間瀬 敏史, ”天体物理学の基礎 I”

[2] 東北大学大学院理学研究科天文学専攻, 2009 年度 理論天体物理学特論 II 授業ノート, 担当教官 犬塚教授

[3] 東北大学理学部宇宙地球物理学科天文学コース, 2006 年度 天体物理学 III 授業プリント, 担当教官 齊尾教授

[4] 東北大学理学部宇宙地球物理学科天文学コース, 2008 年度 天体物理学 III 授業ノート, 担当教官 李准教授