General Relativity

update: 2018 May. 19, author: Sho K. NAKAMURA

[?] 重力波の振幅、四重極公式

時空に摂動が加わり、計量テンソルが

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & & & \mathbf{0} \\ & E_+ & & \\ & & -E_+ & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

のように変化したとする。ただし $|E_+| \ll 1$ である。重力波の pdf の (8) 式とアインシュタイン方程式より

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) h_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \implies \Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2}$$

ここで $\Box$ はダランベール演算子である。ダランベール方程式の解より

$$h_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{16\pi G}{c^4}\right) \iiint_{V'} \frac{[T_{\mu\nu}]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = \frac{4G}{c^4} \iiint_{V'} \frac{[T_{\mu\nu}]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \tag{3}$$

ここで $[T_{\mu\nu}] \equiv T_{\mu\nu}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)$ であり、retarded time(遅延時刻) での物理量を [ ] で表す。ここで、考えている重力波源の大きさ R に比べて、重力波源の位置は観測者から十分に遠いと仮定する。すなわち $r = |\mathbf{r}| \gg R$ とすると

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r} + \cdots \tag{4}$$

と展開できる。これより

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}) = T_{\mu\nu}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} T_{\mu\nu}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) + \cdots \tag{5}$$

第二項の大きさを見積もる。先ほどの重力波源の位置が観測者から十分遠いという仮定から $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' \ll 1$ であることと、天体の運動 (時間変動) が十分ゆっくりであるというスローモーション近似、すなわち $\partial/\partial t \sim 0$ とすると

$$h_{\mu\nu} \simeq \frac{4G}{c^4 r} \iiint_{V'} T_{\mu\nu}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}) dV' \tag{6}$$

と書ける。重力波の成分は空間成分にしか存在しないため、以降は h_{ij} のみを考える。唐突だが

$$(T^{\alpha\beta} x_i' x_j')_{,\alpha\beta} = (T^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} x_i' x_j' + T^{\alpha\beta}\delta_{i\alpha} x_j' + T^{\alpha\beta} x_i' \delta_{j\alpha})_{,\beta} \tag{7}$$

を考える。ここで完全流体の応力・エネルギーテンソルは保存則 $T^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = 0$ を満たすので、

$$(T^{\alpha\beta} x_i' x_j')_{,\alpha\beta} = (T_i^{\beta} x_j' + T_j^{\beta} x_i')_{,\beta} = T_i^{\beta}\delta_{j\beta} + T_j^{\beta}\delta_{i\beta} = 2T_{ij} \tag{8}$$

一方

$$
\begin{aligned}
\iiint_{V'}(T^{\alpha\beta}x'_i x'_j)_{,\alpha\beta}dV' &= \iiint_{V'}\left\{(T^{0\beta}x'_i x'_j)_{,0\beta}+(T^{k\beta}x'_i x'_j)_{,k\beta}\right\}dV' = \iiint_{V'}\left\{(T^{00}x'_i x'_j)_{,00}+(T^{0\ell}x'_i x'_j)_{,0\ell}+(T^{k\beta}x'_i x'_j)_{,k\beta}\right\}dV' \\
&= \iiint_{V'}(T^{00}x'_i x'_j)_{,00}dV' + \iint_{S'}(T^{0\ell}x'_i x'_j)_{,0}dS_\ell + \iint_{S'}(T^{k\beta}x'_i x'_j)_{,\beta}dV' = \iiint_{V'}(T^{00}x'_i x'_j)_{,00}dV' \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\iiint_{V'}\rho c^2 x'_i x'_j dV' = \frac{\partial}{\partial t^2}\iiint_{V'}\rho x'_i x'_j dV' \qquad (9)
\end{aligned}
$$

である。途中、ガウスの定理と無限遠での面積分は 0 であること、そして $T^{00}=\rho c^2$ を用いた。(8), (9) 式を (6) 式に用いて

$$
h_{ij} \simeq \frac{2G}{c^4 r}\frac{\partial}{\partial t^2}\iiint_{V'}\rho x'_i x'_j dV' \qquad (10)
$$

四重極モーメント

$$
D_{ij} = \iiint_{V'}\rho x'_i x'_j dV' \qquad (11)
$$

を用いて

$$
h_{ij} \simeq \frac{2G}{c^4 r}\ddot{D}_{ij}(t-r/c) \qquad (12)
$$

となる。電磁波が双極子放射が最低次であったのに対し、重力波は四重極放射が最低次である。これはこのように次のように解釈できる。
電磁気学では磁気単極子が存在しない ($\nabla\cdot\mathbf{B}=0$) ため、電磁放射は双極子成分から始まる。
重力理論では、質量単極子にあたる成分は質量保存則、質量双極子にあたる成分は運動量保存になるため、重力波放射は四重極成分から始まる。

References

[1] 川村静児, 重力波天文学の最前線

[2] 平松尚志, 修士論文 宇宙論的起源の背景重力波による余剰次元の探求