General Relativity

update: 2017 Oct. 18, author: Sho K. NAKAMURA

[?] 弱重力場 (非相対論) 極限でニュートンの重力場中の運動方程式が導けるか？

弱重力場極限ということで、計量テンソルを

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1-h_{00} & & & \mathbf{0} \\ & 1+h & & \\ & & 1+h & \\ \mathbf{0} & & & 1+h \end{pmatrix} \tag{1}$$

とし、$\dot{h_{00}} = \dot{h} = 0, |h_{00}| \ll 1, |h| \ll 1$ とする。また非相対論極限より $v^2/c^2 \ll 1$ とし、さらに粒子の軌跡を表現するパラメータであった τ も $\tau \simeq t$ とする。さらに (g_{ij}) の逆行列成分に関しても、テイラー展開から

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} \simeq -1 + h_{00} \tag{2}$$

$$g^{ij} = \frac{1}{g_{ij}} \simeq (1-h)\delta^{ij} \tag{3}$$

と近似できるものとする。また 4 元速度も

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} \sim c,\ u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \simeq v^i \tag{4}$$

近似できる。
重力場中の運動方程式より

$$\frac{du^i}{dt} = -\Gamma^i_{\alpha\nu} u^\alpha u^\nu \tag{5}$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{i\beta}(\underbrace{g_{\beta 0,0}}_{=0} + \underbrace{g_{\beta 0,0}}_{=0} + g_{00,\beta}) = -\frac{1}{2} g^{ii} g_{00,i} = \frac{1}{2}(1-h)\delta^{ij}\partial_i h_{00} = \frac{1}{2}\delta_{ij} h_{00,j} \tag{6}$$

$$\Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2} g^{i\beta}(g_{\beta j,0} + g_{\beta j,0} - g_{j0,\beta}) = \frac{1}{2} g^{ik}(\underbrace{g_{kj,0}}_{=0} + g_{kj,0} - g_{j0,k}) = \frac{1}{2} g^{ik}(g_{kj,0} - g_{j0,k}) = 0 = \Gamma^i_{0j} \tag{7}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\beta}(g_{\beta j,k} + g_{\beta k,j} - g_{jk,\beta}) = \frac{1}{2} g^{i\ell}(g_{\ell j,k} + g_{\ell k,j} - g_{jk,\ell}) = \frac{1}{2}\delta^{i\ell}(h_{,k}\delta_{\ell j} + h_{,j}\delta_{\ell k} - h_{,\ell}\delta_{jk}) = \frac{1}{2}(h_{,k}\delta^i_j + h_{,j}\delta^i_k - h_{,\ell}\delta^{i\ell}\delta_{jk}) \tag{8}$$

$$\frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{2}\delta^{ij} h_{00,j} c^2 - \frac{1}{2}(h_{,k}\delta^i_j + h_{,j}\delta^i_k - h_{,\ell}\delta^{i\ell}\delta_{jk}) v^j v^k \underbrace{\simeq}_{c^2 \gg v^2} -\frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \tag{9}$$

これがニュートンの運動方程式と一致して欲しいので、$h_{00} = \dfrac{2\Psi}{c^2}$ であればよい。

$$\frac{dv^i}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \tag{10}$$

この式から $E = \frac{1}{2}v^2 + \Psi = \mathrm{const}$ より $\Psi \simeq v^2$ くらいの運動となるので、$|h_{00}| = |\dfrac{2\Psi}{c^2}| \simeq |\dfrac{v^2}{c^2}| \ll 1$ と置く仮定は間違っていない。