General Relativity

update: 2017 Oct. 25, author: Sho K. NAKAMURA

[?] 物質場の応力・エネルギーテンソル

唐突だが完全流体の応力・エネルギーテンソルを

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)\frac{u^\mu}{c}\frac{u^\nu}{c} + pg^{\mu\nu} \tag{1}$$

と定義する。ρc^2 はエネルギー密度、p は圧力、$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ である。この定義が正しいかどうかは、局所慣性系で非相対論的流体 $v/c \ll 1, p \ll \rho c^2, u^\mu \simeq (c, v^i)$ の仮定をするとわかる。これより

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c v_x & \rho c v_y & \rho c v_z \\ \rho v_x c & \rho v_x^2 + p & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y c & \rho v_y v_x & \rho v_y^2 + p & \rho v_y v_z \\ \rho v_z c & \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z^2 + p \end{pmatrix} \tag{2}$$

局所慣性系より $\nabla_\lambda = \partial_\lambda$。

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = \partial_0 T^{00} + \partial_x T^{x0} + \partial_y T^{y0} + \partial_z T^{z0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\rho c^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x c) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y c) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z c) = c\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\right\} = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu x} &= \partial_0 T^{0x} + \partial_x T^{xx} + \partial_y T^{yx} + \partial_z T^{zx} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x c) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x v_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \nabla\cdot(\rho v_x \mathbf{v} + \mathbf{I}p) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

(3), (4) 式より、局所慣性系での完全流体のエネルギー・運動量保存則から、完全流体の応力・エネルギーテンソルの定義はこれで間違っておらず、また $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ が成立する。