# Cosmology

update: 2017 Nov. 14, author: Sho K. NAKAMURA

## [ ? ] 相対論的物質、光子の状態方程式

光子が一辺 $L$ の立方体に閉じ込められているとする。図のように完全弾性衝突を考えると、1 回の衝突で $x$ 方向の壁に与える力積は $\Delta p_x = \frac{2h\nu}{c}\cos\theta$ である。$x$ 方向に 1 往復するのにかかる時間は $t = \frac{2L}{c\cos\theta}$ より

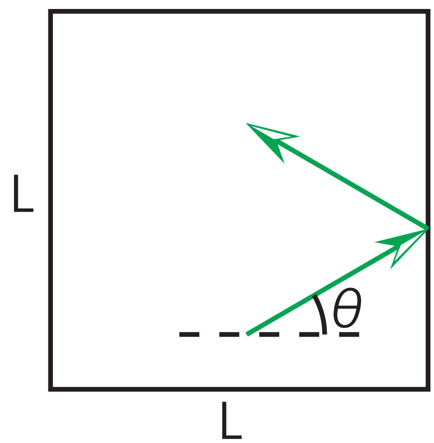


fig 1: 角度 $\theta$ で壁に衝突する粒子

$$p_\gamma = \iint \frac{\frac{2h\nu}{c}\cos\theta}{t}\frac{L^3}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}\frac{2\nu^2}{c^3}\frac{d\nu d\Omega}{L^2} = \iint \frac{\frac{2h\nu^3}{c^3}\cos^2\theta}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}d\nu d\Omega = \int_0^\infty d\nu\int_{-1}^{1}d\mu 2\pi\frac{\frac{2h\nu^3}{c^3}\mu^2}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1} = \frac{1}{3}\underbrace{4\pi\int_0^\infty d\nu\frac{\frac{2h\nu^3}{c^3}}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}}_{=\rho_\gamma c^2} = \frac{1}{3}\rho_\gamma c^2 \tag{1}$$

## Appendix: 光子のエネルギー密度 (統計力学)

1 辺 $L$ の立方体の中に光子が閉じ込められていることを考える。光子が存在しているということは、$L$ で周期境界条件を満たしていると考えることができるので

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = e^{ik_xx+ik_yy+ik_zz} \tag{2}$$

$$\begin{cases} k_xL = 2\pi n_x \ (n_x = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \\ k_yL = 2\pi n_y \\ k_zL = 2\pi n_z \end{cases} \tag{3}$$

と書ける。よって状態数は

$$dn_xdn_ydn_z = \frac{dk_x}{\frac{2\pi}{L}}\frac{dk_y}{\frac{2\pi}{L}}\frac{dk_z}{\frac{2\pi}{L}} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dk_xdk_ydk_z \tag{4}$$

よって状態密度は

$$\frac{d^3n}{L^3} = \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3}k^2\sin\theta_k dk d\varphi_k d\theta_k \underbrace{=}_{k=2\pi\nu/c} \frac{\nu^2}{c^3}d\nu d\Omega \tag{5}$$

途中、$k$ 空間での極座標積分を考えて変形を行った。統計力学の知識より占有確率は $e^{-\frac{\epsilon}{k_BT}}$、光子はボース粒子より、カノニカル分布分配関数は

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}} \tag{6}$$

途中、無限等比級数の和の公式を用いた。$x \equiv h\nu/k_B T$ と置換して、エネルギー $\epsilon = nh\nu$ の光子の平均個数は

$$f_\gamma(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{e^{-nx}}{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{Z}\left(-\frac{de^{-nx}}{dx}\right) = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1} \tag{7}$$

よってエネルギー密度 $\rho_\gamma c^2$ は、光子の 1 個のエネルギー × 平均個数 × 状態密度 × 独立モード数 (2) を積分したものである。

$$\rho_\gamma c^2 = \int_0^\infty \int_0^{4\pi} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \frac{2\nu^2}{c^3} d\nu d\Omega \tag{8}$$

よって (1) 式の途中式の変形が説明できた。ついでに最後の式の計算を済ませてしまおう。

$$\rho_\gamma c^2 = \frac{8\pi}{c^3} \frac{k_B^4 T^4}{h^3} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{=6\zeta(4)=\frac{\pi^4}{15}} = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3} T^4 \tag{9}$$

## Appendix: 光子の数密度

$$n = \int_0^\infty d\nu \int_0^{4\pi} d\Omega \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \frac{2\nu^2}{c^3} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{k_B^3 T^3}{h^3} \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1}}_{=2\zeta(3)\sim 2.4} \tag{10}$$

CMB(宇宙マイクロ波背景放射) は $T = 2.725K$ より、$n_{\gamma,0} \sim 412\mathrm{cm}^{-3}$ となる。