Cosmology

update: 2017 Nov. 14, author: Sho K. NAKAMURA

[?] 相対論的物質、ニュートリノの状態方程式

統計力学の知識より占有確率は $e^{-\frac{\epsilon}{k_BT}}$、ニュートリノはフェルミ粒子より、カノニカル分布分配関数は

$$Z=\sum_{n=0}^{1}e^{-\frac{nh\nu}{k_BT}}=1+e^{-\frac{h\nu}{k_BT}} \tag{1}$$

質量 0 を仮定、すなわち光子と同様に平均個数・状態密度を求めることができるとすると

$$f_{\mathrm{FD}}(\nu)=\frac{1}{Z}e^{-\frac{h\nu}{k_BT}}=\frac{1}{1+e^{\frac{h\nu}{k_BT}}} \tag{2}$$

よってエネルギー密度 $\rho_\nu c^2$ は、ニュートリノの 1 個のエネルギー × 平均個数 × 状態密度 × 独立モード数 (1) を積分したものである。

$$\rho_\nu c^2=\int_0^\infty\int_0^{4\pi}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}+1}\frac{2\nu^2}{c^3}d\nu d\Omega=\frac{8\pi}{c^3}\frac{k_B^4T^4}{h^3}\int_0^\infty\frac{x^3}{e^x+1}dx \tag{3}$$

$$\frac{1}{e^{2x}-1}=\frac{1}{(e^x+1)(e^x-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^x+1}\right)\implies\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{e^x-1}-\frac{2}{e^{2x}-1} \tag{4}$$

より

$$\int_0^\infty dx\frac{x^3}{e^x+1}=\int_0^\infty\left(\frac{x^3}{e^x-1}-\frac{2x^3}{e^{2x}-1}\right)=\int_0^\infty dx\frac{x^3}{e^x-1}-\frac{1}{8}\int_0^\infty dX\frac{X^3}{e^X-1}=\frac{7}{8}\int_0^\infty dx\frac{x^3}{e^x-1} \tag{5}$$

$$\therefore\ \rho_\nu c^2=\frac{7}{8}\rho_\gamma c^2,\ p_\nu=\frac{1}{3}\rho_\nu c^2 \tag{6}$$