General Relativity

update: 2017 Oct. 18, author: Sho K. NAKAMURA

[?] 質量のない粒子の測地線方程式

この世界には質量のない粒子 (たとえば光子) が存在する。その粒子の 4 元運動量を

$$p^\mu \equiv m\frac{dx^\mu}{d\tau} = mu^\mu \tag{1}$$

と定義する。運動量は有限なので、$m \to 0$ で $d\tau \to 0$ となり、$d\tau/m \neq 0$ でなくてはならない。ここで $d\lambda \equiv d\tau/m$ をアフィンパラメータと定義する。4 元運動量はこのパラメータを用いて

$$p^\mu = \frac{du^\mu}{d\lambda} \tag{2}$$

測地線方程式より

$$m^2\frac{du^\mu}{d\tau} = -m^2\Gamma^\mu_{\alpha\nu}u^\alpha u^\nu \tag{3}$$

$$(\text{左辺}) = m\frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{dp^\mu}{d\lambda} \tag{4}$$

$$(\text{右辺}) = -\Gamma^\mu_{\alpha\nu}p^\alpha p^\nu \tag{5}$$

両辺を $p^0 = \frac{dx^0}{d\lambda} = c\frac{dt}{d\lambda}$ で割ると

$$\frac{1}{p^0}\frac{dp^\mu}{d\lambda} = \frac{d\lambda}{cdt}\frac{dp^\mu}{d\lambda} = \frac{1}{c}\frac{dp^\mu}{dt} \tag{6}$$

より

$$\frac{dp^\mu}{dt} = -\frac{c}{p^0}\Gamma^\mu_{\alpha\nu}p^\alpha p^\nu \tag{7}$$

これが質量のない粒子の測地線方程式である。