エルミート多項式

update: 2017 Nov. 24, author: Sho K. Nakamura

母関数 (generating function) による関数定義

x, y の関数 $f(x,y)$ を y について展開すると、一般に

$$f(x,y) = \sum g_n(x) y^n \tag{1}$$

のように書くことができる。そして (1) 式のように、y^n の係数として $g_n(x)$ という関数が定義される。このようなとき、$f(x,y)$ を関数列 $\{g_n(x)\}$ の母関数という。

Hermite polynomial

母関数展開

$$e^{2z\omega-\omega^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!}\omega^n \tag{2}$$

によって定義される $H_n(z)$ を Hermite 多項式と呼ぶ。

$$e^{2z\omega-\omega^2} = e^{2z\omega}e^{-\omega^2} = \left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2z\omega)^l}{l!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\omega^2)^m}{m!}\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2z)^l}{l!m!}\omega^{l+2m}$$

$l+2m = n (l = n-2m)$ とおき、ω^n にまとめる。

$$e^{2z\omega-\omega^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^m(2z)^{n-2m}}{(n-2m)!m!}\right\}\omega^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^m n!(2z)^{n-2m}}{(n-2m)!m!}\right\}\frac{\omega^n}{n!}$$

$$\therefore\ H_n(z) = \sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^m n!(2z)^{n-2m}}{(n-2m)!m!} \tag{3}$$

(2) 式を固定した z に対して ω に関する Taylor 展開を考えると

$$H_n = \left[\frac{d^n}{d\omega^n}e^{2z\omega-\omega^2}\right]_{\omega=0} = e^{z^2}\left[\frac{d^n}{d\omega^n}e^{-(\omega-z)^2}\right]_{\omega=0} \underbrace{=}_{\omega-z=u} e^{z^2}\left[\frac{d^n}{du^n}e^{-u^2}\right]_{u=-z} = e^{z^2}\frac{d^n}{d(-z)^n}e^{-z^2} = (-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2} \tag{4}$$

という微分系での表現も得る。
この多項式の直行性について調べよう。そのためには以下の積分を考える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2z\omega-\omega^2}e^{2zt-t^2}e^{-z^2}\ dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-\omega-t)^2}e^{2t\omega}\ dz \underbrace{=}_{\text{gaussintegral}} e^{2t\omega}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2t\omega)^n}{n!}$$

一方、(2) 式より

$$e^{2z\omega-\omega^2}e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_nH_m}{n!m!}\omega^n t^m$$

これを先ほどの積分に代入。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\omega^n t^m}{n!m!}\int_{-\infty}^{\infty}H_n H_m e^{-z^2}\ dz=\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\omega^n t^n}{n!}$$

両辺の ω, t のベキの係数を比較することで

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_n H_m e^{-z^2}\ dz=2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm} \tag{5}$$

Hermite 多項式が満たす漸化式をいくつか証明しておこう。

$$(2)\underbrace{\Longrightarrow}_{d/dz}2\omega e^{2z\omega-\omega^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n'}{n!}\omega^n$$

$$(L.H.S)=2\omega\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n}{n!}\omega^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2H_n}{n!}\omega^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2H_{n-1}}{(n-1)!}\omega^n$$

$$\therefore\ \frac{H_n'}{n!}=\frac{2H_{n-1}}{(n-1)!}\implies H_n'=2nH_{n-1}\ (n>0) \tag{6}$$

$$(2)\underbrace{\Longrightarrow}_{d/d\omega}2(z-\omega)e^{2z\omega-\omega^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(n-1)!}\omega^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+1}}{n!}\omega^n$$

$$(L.H.S)=2z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n}{n!}\omega^n-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n}{n!}\omega^{n+1}=2z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n}{n!}\omega^n-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{(n-1)!}\omega^n$$

$$\therefore\ \frac{H_{n+1}}{n!}=\frac{2zH_n}{n!}-\frac{2H_{n-1}}{(n-1)!}\implies H_{n+1}=2zH_n-2nH_{n-1}\ (n>0) \tag{7}$$

また (4) 式より

$$\begin{aligned}
H_n' &= (-1)^n 2ze^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}+(-1)^2(-1)^n e^{z^2}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}e^{-z^2}=2z(-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}-(-1)^{n+1}e^{z^2}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}e^{-z^2}\\
&= 2zH_n-H_{n+1}\\
\underbrace{\Longrightarrow}_{d/dz} &\quad H_n''=2H_n+2zH_n'-H_{n+1}'
\end{aligned}$$

$$(6)\implies H_{n+1}'=2(n+1)H_n$$

$$\therefore H_n''=2H_n+2zH_n'-2(n+1)H_n=2zH_n'-2nH_n\implies H_n''-2zH_n'+2nH_n=0 \tag{8}$$

これを Hermite の微分方程式という。
Hermite 多項式の具体的な形は以下のよう。

$$H_0(z)=1,\ H_1(z)=2z,\ H_2(z)=4z^2-2,\ H_3(z)=8z^3-12z,\ H_4(z)=16z^4-48z^2+12,\ H_5(z)=32z^5-160z^3+120z \tag{9}$$

Bibliography

[1] 田島 一郎, 近藤 次郎, ”改訂演習工科の数学 4 複素関数”, 培風館

[2] 中山 恒義, ”裳華房フィジックスライブラリー 物理数学 II”, 裳華房

[3] 福山 英敏, 小形 正男, ”基礎物理学シリーズ 3 物理数学 I”, 朝倉書店

[4] 東北大学理学部物理学科, 宇宙地球物理学科 波動論 (担当教官：柴田尚和) 授業プリント