General Relativity

update: 2017 Oct. 13, author: Sho K. NAKAMURA

[?] 測地線方程式

質量 $m \neq 0$ の粒子が軌跡 $\mathbf{x}(\tau)$ を描いて運動しているとする。

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2 \tag{1}$$

ここで

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{d\mathbf{x}^2}{dt}} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \underbrace{=}_{\beta \equiv v/c} dt\sqrt{1-\beta^2} \underbrace{=}_{\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dt}{\gamma} \tag{2}$$

ここで 4 元速度を

$$\mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau},\ u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{3}$$

のように軌跡の接ベクトルとして定義する。今、粒子には重力しか働いていないとする。慣性系では必ず重力を打ち消すことができるので、粒子は慣性系で等速直線運動になるはずである。よって速度 $\mathbf{u}$ に沿った方向への微分 $u^\mu \nabla_\mu$ を考えると

$$u^\mu \nabla_\mu \mathbf{u} = 0 \tag{4}$$

となるはずである。これを測地線方程式と呼ぶ。重力のみが働く粒子は測地線（慣性系での等速直線運動の軌跡）を通る。共変微分式より

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu + u^\mu \Gamma^\nu_{\alpha\mu} u^\alpha = 0 \implies \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}u^\mu u^\alpha = \frac{du^\nu}{d\tau} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}u^\mu u^\alpha = 0 \implies \frac{du^\nu}{d\tau} = -\Gamma^\nu_{\alpha\mu}u^\mu u^\alpha \tag{5}$$

最後の式の左辺が加速度、右辺が重力である。