Cosmology

update: 2017 Nov. 12, author: Sho K. NAKAMURA

[?] フリードマン方程式

アインシュタイン方程式より

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1}$$

ここで $g_{\mu\nu}$ ロバートソン・ウォーカー計量テンソル

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \mathbf{0} \\ & \frac{a^2}{1-Kr^2} & & \\ & & a^2r^2 & \\ \mathbf{0} & & & a^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

である。$T_{\mu\nu}$ は完全流体の応力エネルギーテンソルだが、静止流体 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を考えると

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)\frac{u^\mu}{c}\frac{u^\nu}{c} + pg_{\mu\nu} \tag{3}$$

$u^\mu = (c, \mathbf{0}), u_\mu = (-c, \mathbf{0})$ より、これの縮約を考えると

$$T^\mu_{\ \mu} = (\rho c^2 + p)\underbrace{\frac{u^\mu}{c}\frac{u_\mu}{c}}_{=-1} + p\underbrace{g^\mu_{\ \mu}}_{=4} = -\rho c^2 + 3p \tag{4}$$

同様にアインシュタイン方程式の縮約を考えると

$$R^\mu_{\ \mu} - \frac{1}{2}R\underbrace{g^\mu_{\ \mu}}_{=4} = -R = \frac{8\pi G}{c^4}(-\rho c^2 + 3p) \tag{5}$$

$$\therefore R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(-\rho c^2 + 3p)g_{\mu\nu}\right) \tag{6}$$

この式の R_{00} と R_{rr} 成分の具体的な式を考える。

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{00} - \frac{1}{2}(-\rho c^2 + 3p)g_{00}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}\left(\rho c^2 + \frac{1}{2}(-\rho c^2 + 3p)\right) = \frac{4\pi G}{c^4}(\rho c^2 + 3p) \tag{7}$$

$R_{00} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{00} - \partial_0\Gamma^\alpha_{\alpha 0} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^\alpha_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha 0},\ \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$ と

$$\Gamma^\alpha_{00} = 0,\ \Gamma^r_{r0} = \frac{1}{2}g^{rr}g_{rr,0} = \frac{a_{,0}}{a},\ \Gamma^\theta_{\theta 0} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{\theta\theta,0} = \frac{a_{,0}}{a},\ \ \Gamma^\varphi_{\varphi 0} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}g_{\varphi\varphi,0} = \frac{a,0}{a}$$

$$\Gamma^r_{0\theta} = \Gamma^r_{0\varphi} = \Gamma^\theta_{r0} = \Gamma^\theta_{\varphi 0} = 0$$

より R_{00} の成分は

$$R_{00} = -\partial_0\left(3\frac{a_{,0}}{a}\right) - 3\left(\frac{a_{,0}}{a}\right)^2 = -\frac{3}{c^2}\frac{\ddot{a}}{a} \tag{8}$$

$$\therefore \ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \tag{9}$$

次に R_{rr} 成分を考える。

$$R_{rr} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{rr} - \frac{1}{2}(-\rho c^2 + 3p)g_{rr}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{a^2}{1-Kr^2}\left(p - \frac{1}{2}(-\rho c^2 + 3p)\right) = \frac{4\pi G}{c^4}\frac{a^2}{1-Kr^2}(\rho c^2 - p) \tag{10}$$

$R_{rr} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{rr} - \partial_r \Gamma^\alpha_{\alpha r} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{rr} - \Gamma^\alpha_{r\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha r}$ と

$$\Gamma^0_{rr} = \frac{aa_{,0}}{1-Kr^2},\ \Gamma^r_{rr} = \frac{Kr}{1-Kr^2},\ \Gamma^\theta_{rr} = \Gamma^\varphi_{rr} = 0,\ \Gamma^0_{0r} = 0,\ \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r} \tag{11}$$

より R_{rr} 成分は

$$R_{rr} = \frac{1}{1-Kr^2}\frac{1}{c^2}\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2\right) \tag{12}$$

(9) 式を用いて

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} \tag{13}$$

(9), (13) 式をフリードマン方程式と呼ぶ。