General Relativity

update: 2017 Nov. 02, author: Sho K. NAKAMURA

[?] アインシュタイン方程式

アインシュタインテンソル

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} \tag{1}$$

は

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0 \tag{2}$$

を満たす。また物質場の応力・エネルギーテンソル

$$T^{\alpha\beta} = (\rho c^2 + p)\frac{u^\alpha}{c}\frac{u^\beta}{c} + pg^{\alpha\beta} \tag{3}$$

も同様に

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{4}$$

を満たすので、定数 κ を用いて

$$G^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta} \tag{5}$$

と書くことができる。これをアインシュタイン方程式と呼ぶ。これは物質が存在することにより (右辺)、空間の曲率が変化する (左辺) ことを意味する式である。この定数 κ を求めるために、重力が弱い極限でポアソン方程式

$$\Delta\Psi = 4\pi G\rho \tag{6}$$

と一致することを用いる。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(1+h_{00}) & & & \mathbf{0} \\ & 1+h & & \\ & & 1+h & \\ \mathbf{0} & & & 1+h \end{pmatrix} \tag{7}$$

ただし $|h_{00}| \ll 1, |h| \ll 1$ かつ $\dot{h_{00}} = 0, \dot{h} = 0$ である。クリストッフェル記号を計算するためにこの逆行列を準備する必要がある。しかし、

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\alpha,\beta} + g_{\sigma\beta,\alpha} + g_{\alpha\beta,\sigma}) \tag{8}$$

より、逆行列を詳細に求めたところで、結局 h_{00}, h の高次数が出てくるだけである。よって

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} = -\frac{1}{1+h_{00}} \simeq -(1-h_{00}) \simeq -1,\ \delta^j_i g^{ij} \simeq 1 \tag{9}$$

である。すると $\Gamma \sim O(h)$ より

$$R^{\alpha}{}_{\gamma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} + \underbrace{\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma\nu}}_{O(h^2)} - \underbrace{\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\gamma}}_{O(h^2)} \simeq \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \tag{10}$$

$$\Gamma^0_{00} = 0,\ \Gamma^0_{0i} = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,i} = \frac{1}{2} h_{00,i},\ \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{ij}(-g_{00,j}) = \frac{1}{2} h_{00,i} \tag{11}$$

より

$$R^0{}_{i0j} = \partial_0 \Gamma^0_{ji} - \partial_j \Gamma^0_{0i} = -\frac{1}{2} h_{00,ij} \tag{12}$$

$$R^0{}_{ij0} = -R^0{}_{i0j} = \frac{1}{2} h_{00,ij} \tag{13}$$

$$R^i{}_{00j} = -\partial_j \Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} h_{00,ij} \tag{14}$$

$$R^0{}_{000} = 0 \tag{15}$$

$$\begin{aligned} R^i{}_{k\ell j} &= \partial_\ell \Gamma^i_{jk} - \partial_j \Gamma^i_{\ell k} = \partial_\ell \left\{ \frac{1}{2} \delta^{im} (\delta_{mj} h_{,k} + \delta_{mk} h_{,j} - \delta_{jk} h_{,m}) \right\} - \partial_j \left\{ \frac{1}{2} \delta^{im} (\delta_{m\ell} h_{,k} + \delta_{mk} h_{,\ell} - \delta_{\ell k} h_{,m}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\delta^i_j h_{,k\ell} - \delta^{jk} \delta^{im} h_{,m\ell} - \delta^i_\ell h_{,kj} + \delta^{\ell k} \delta^{im} h_{,mj}) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\therefore R_{k\ell} = R^\alpha{}_{k\alpha\ell} = R^0{}_{k0\ell} + R^i{}_{ki\ell} = -\frac{1}{2} h_{00,k\ell} - \frac{3}{2} h_{,k\ell} + \frac{1}{2} h_{,k\ell} + \frac{1}{2} h_{,k\ell} - \frac{1}{2} \delta^{k\ell} \Delta h = -\frac{1}{2} h_{00,k\ell} - \frac{1}{2} h_{,k\ell} - \frac{1}{2} \delta^{k\ell} \Delta h \tag{17}$$

$$\therefore R = g^{\mu\nu} R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = g^{00} R^\alpha{}_{0\alpha 0} + g^{k\ell} R^0{}_{k0\ell} + g^{k\ell} R^i{}_{ki\ell} = -\frac{1}{2} \Delta h_{00} - \frac{1}{2} \Delta h_{00} - 2\Delta h = -\Delta h_{00} - 2\Delta h \tag{18}$$

$$\therefore R_{00} = R^0{}_{000} + R^i{}_{0i0} = \frac{1}{2} \Delta h_{00} \tag{19}$$

よって $i \neq j$ に対して

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\frac{1}{2} h_{00,ij} - \frac{1}{2} h_{,ij} = \kappa T_{ij} \tag{20}$$

ここで $u^\alpha = 0$ のように、完全流体が静止しているとすると

$$-\frac{1}{2} h_{00,ij} - \frac{1}{2} h_{,ij} = \kappa T_{ij} = 0 \implies h_{00} = -h = \frac{2\Psi}{c^2} \tag{21}$$

$$\therefore G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = \frac{1}{2} \Delta h_{00} + \frac{1}{2} (-\Delta h_{00} - 2\Delta h) = -\Delta h = \frac{2}{c^2} \Delta \Psi = \frac{8\pi G}{c^2} \rho = \kappa T^{00} = \kappa \rho c^2 \implies \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{22}$$

よって、アインシュタイン方程式は

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta} \tag{23}$$