General Relativity

update: 2017 Nov. 03, author: Sho K. NAKAMURA

[?] アインシュタインテンソル

ビアンキの恒等式より

$$\nabla_\lambda R^{\alpha}{}_{\gamma\mu\alpha} + \nabla_\mu R^{\alpha}{}_{\gamma\alpha\lambda} + \nabla_\alpha R^{\alpha}{}_{\gamma\lambda\mu} = 0 \tag{1}$$

リッチテンソルという、リーマンテンソルのから派生したものを新たに

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \tag{2}$$

として定義する。

$$\begin{aligned}
(1) \quad \Longrightarrow \quad & -\nabla_\lambda R_{\gamma\mu} + \nabla_\mu R_{\gamma\lambda} + \nabla_\alpha R^{\alpha}{}_{\gamma\lambda\mu} = 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{g^{\lambda\gamma}\times} -\nabla_\lambda g^{\lambda\gamma} R_{\gamma\mu} + \nabla_\mu g^{\lambda\gamma} R_{\gamma\lambda} + \nabla_\alpha g^{\lambda\gamma} R^{\alpha}{}_{\gamma\lambda\mu} = 0 \\
\Longrightarrow \quad & -\nabla_\lambda R^{\lambda}{}_{\mu} + \nabla_\mu R^{\lambda}{}_{\lambda} + \nabla_\alpha g^{\lambda\gamma} g^{\alpha\sigma} \underbrace{R_{\sigma\gamma\lambda\mu}}_{=-R_{\gamma\sigma\lambda\mu}} = -\nabla_\lambda R^{\lambda}{}_{\mu} + \nabla_\mu R^{\lambda}{}_{\lambda} - \nabla_\alpha g^{\alpha\sigma} g^{\lambda\gamma} R_{\gamma\sigma\lambda\mu} = -\nabla_\lambda R^{\lambda}{}_{\mu} + \nabla_\mu R^{\lambda}{}_{\lambda} - \nabla_\alpha g^{\alpha\sigma} R^{\lambda}{}_{\sigma\lambda\mu} \\
& = 0
\end{aligned}$$

またリッチスカラーを

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\mu} \tag{3}$$

と定義すると

$$\begin{aligned}
& \nabla_\alpha R^{\alpha}{}_{\mu} - \nabla_\mu R + \nabla_\alpha g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\mu} = \nabla_\alpha g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\mu} - \nabla_\mu R + \nabla_\alpha g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\mu} = 2\nabla_\alpha g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\mu} - \nabla_\mu R = 0 \\
& \underbrace{\Longrightarrow}_{g^{\beta\mu}\times} 2\nabla_\alpha R^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha R g^{\alpha\beta} = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

よって

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} \tag{5}$$

とおくと

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0 \tag{6}$$

この $G^{\alpha\beta}$ をアインシュタインテンソルと呼ぶ。