General Relativity

update: 2017 Oct. 29, author: Sho K. NAKAMURA

[?] リーマンテンソル

曲面上でのベクトルの平行移動とその差分を考える。

$$d_1\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}(B \to A) - \mathbf{A}(A)}{\delta x^1} \tag{1}$$

$$d_2\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}(D \to A) - \mathbf{A}(A)}{\delta x^2} \tag{2}$$

d_1 は緯線方向の平行移動、d_2 は経線方向の平行移動を表している。曲面上の平行移動なのでこれらは $\mathbf{0}$ ではない。これを考えて、2 方向への平行移動を考えると

$$d_1 d_2\mathbf{A} = \frac{(\mathbf{A}((C \to B) \to A) - \mathbf{A}(D \to A)) - (\mathbf{A}(B \to A) - \mathbf{A}(A))}{\delta x^1 \delta x^2} \tag{3}$$

$$d_2 d_1\mathbf{A} = \frac{(\mathbf{A}((D \to C) \to A) - \mathbf{A}(B \to A)) - (\mathbf{A}(D \to A) - \mathbf{A}(A))}{\delta x^2 \delta x^1} \tag{4}$$

この差を考えると

$$d_1 d_2\mathbf{A} - d_2 d_1\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}((C \to B) \to A) - \mathbf{A}((C \to D) \to A)}{\delta x^1 \delta x^2} \neq \mathbf{0} \tag{5}$$

となる。これは同じ C 地点にある同じベクトルを違う経路で曲面上を平行移動すると、違うベクトルになることを意味する。これは空間の曲り具合を表現していると考えられる。よって交換関係

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu \tag{6}$$

をベクトルに作用させたものを

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\alpha \equiv R^\alpha_{\gamma\mu\nu} A^\gamma \tag{7}$$

の R をリーマンテンソルと定義する。先ほども述べたとおり、このリーマンテンソルは空間の曲がり具合を表現するものである。

$$\begin{aligned}
(L.H.S) &= \nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\alpha = \partial_\mu(\nabla_\nu A^\alpha) \underbrace{-\Gamma^\gamma_{\mu\nu} \nabla_\gamma A^\alpha}_{(1)} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \nabla_\nu A^\alpha - \partial_\nu(\nabla_\mu A^\alpha) + \underbrace{\Gamma^\gamma_{\nu\mu} \nabla_\gamma A^\alpha}_{(1)} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} \nabla_\mu A^\alpha \\
&= \partial_\mu(\underbrace{\partial_\nu A^\alpha}_{(1)} + \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} A^\gamma) + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}(\partial_\nu A^\gamma + \Gamma^\gamma_{\nu\beta} A^\beta) - \partial_\nu(\underbrace{\partial_\mu A^\alpha}_{(1)} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} A^\gamma) - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma}(\partial_\mu A^\gamma + \Gamma^\gamma_{\nu\beta} A^\beta) \\
&= (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\gamma}) A^\gamma + \underbrace{\Gamma^\alpha_{\nu\gamma}(\partial_\mu A^\gamma)}_{(1)} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}(\underbrace{\partial_\nu A^\gamma}_{(2)} + \Gamma^\gamma_{\nu\beta} A^\beta) - (\partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}) A^\gamma \underbrace{-\Gamma^\alpha_{\mu\gamma}(\partial_\nu A^\gamma)}_{(2)} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma}(\underbrace{\partial_\mu A^\gamma}_{(1)} + \Gamma^\gamma_{\nu\beta} A^\beta) \\
&= (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\gamma}) A^\gamma + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\gamma} A^\gamma - (\partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}) A^\gamma - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\gamma} A^\gamma
\end{aligned} \tag{8}$$

A^γ は任意のベクトルなので、

$$R^{\alpha}_{\gamma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\gamma} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\gamma} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} - \Gamma^\alpha_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\gamma} \tag{9}$$

また局所慣性系では $\Gamma = 0$ より

$$\bar{R}^{\alpha}_{\gamma\mu\nu} = \bar{\partial}_\mu \bar{\Gamma}^\alpha_{\nu\gamma} - \bar{\partial}_\nu \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\gamma} \tag{10}$$

交換関係をスカラーに作用させると

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi = 0 \tag{11}$$

これはスカラーに向きがなく、曲面の平行移動に関係なく存在する値だからである。これより

$$\begin{aligned} &[\nabla_\mu, \nabla_\nu](A^\alpha B_\alpha) = ([\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\alpha)B_\alpha + A^\alpha([\nabla_\mu, \nabla_\nu]B_\alpha) = 0 = R^\alpha_{\gamma\mu\nu}A^\gamma B_\alpha + A^\alpha([\nabla_\mu, \nabla_\nu]B_\alpha) \\ &\implies A^\alpha([\nabla_\mu, \nabla_\nu]B_\alpha) = -R^\gamma_{\alpha\mu\nu}A^\alpha B_\gamma \end{aligned} \tag{12}$$

A^α は任意のベクトルなので

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]B_\alpha = -R^\gamma_{\alpha\mu\nu}B_\gamma \tag{13}$$

[?] 補遺: リーマンテンソルの公式

$$R_{\alpha\gamma\mu\nu} = g_{\alpha\sigma}R^{\sigma}{}_{\gamma\mu\nu} \tag{14}$$

局所慣性系では

$$\begin{aligned} R_{\alpha\gamma\mu\nu} &= \eta_{\alpha\sigma}(\partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\gamma} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\gamma}) = \eta_{\alpha\sigma}\frac{1}{2}\partial_\mu\{\eta^{\sigma\rho}(\eta_{\rho\nu,\gamma} + \eta_{\rho\gamma,\nu} - \eta_{\nu\gamma,\rho})\} + \eta_{\alpha\sigma}\frac{1}{2}\partial_\nu\{\eta^{\sigma\rho}(\eta_{\rho\mu,\gamma} + \eta_{\rho\gamma,\mu} - \eta_{\mu\gamma,\rho})\} \\ &= \frac{1}{2}\delta^\rho_\alpha(\eta_{\rho\nu,\gamma\mu} - \eta_{\nu\gamma,\rho\mu} - \eta_{\rho\mu,\gamma\nu} + \eta_{\mu\gamma,\rho\nu}) = \frac{1}{2}(\eta_{\alpha\nu,\gamma\mu} - \eta_{\nu\gamma,\alpha\mu} - \eta_{\alpha\mu,\gamma\nu} + \eta_{\mu\gamma,\alpha\nu}) \end{aligned} \tag{15}$$

これより

$$R_{\mu\nu\alpha\gamma} = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\gamma,\nu\alpha} - \eta_{\gamma\nu,\mu\alpha} - \eta_{\mu\alpha,\nu\gamma} + \eta_{\alpha\nu,\mu\gamma}) = R_{\alpha\gamma\mu\nu} \tag{16}$$

$$R_{\gamma\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta_{\gamma\nu,\alpha\mu} - \eta_{\nu\alpha,\gamma\mu} - \eta_{\gamma\mu,\alpha\nu} + \eta_{\mu\alpha,\gamma\nu}) = -R_{\alpha\gamma\nu\mu} \tag{17}$$

$$R_{\alpha\gamma\nu\mu} = R_{\nu\mu\alpha\gamma} = -R_{\mu\nu\alpha\gamma} = -R_{\alpha\gamma\mu\nu} \tag{18}$$