General Relativity

update: 2017 Oct. 09, author: Sho K. NAKAMURA

[?] リーマン幾何学のベクトル変換

ベクトルを

$$\mathbf{A}=\sum_{\mu=0}^{3}A^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}=A^{\mu}(\mathbf{x})\mathbf{e}_{\mu}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

のように基底ベクトル $\mathbf{e}$ を用いて、縮約して書く。これをアインシュタイン縮約という。ここで $\mathbf{e}_{\mu}(\mathbf{x})$ は座標の基底ベクトルである。また縮約の仕方であるが、ギリシャ文字の場合は 0 から 3 までの和、ローマ字の場合は 1 から 3 までの和、とする。また位置ベクトル $\mathbf{x}$ についても

$$\mathbf{x}=(ct,x,y,z)=(x^0,x^1,x^2,x^3) \tag{2}$$

のように書く。では $\mathbf{x}$ を x 系から x' 系へ変換することを考えよう。このとき、基底も $\mathbf{e}_{\mu}(\mathbf{x})\to\mathbf{e}'_{\mu}(\mathbf{x}')$ へと変換されるので

$$\mathbf{x}=x^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}(\mathbf{x})=\mathbf{x}'=x'^{\mu}\mathbf{e}'_{\mu}(\mathbf{x}') \tag{3}$$

のように書かれる。このとき微小な変位ベクトル $d\mathbf{x}$ は

$$d\mathbf{x}=dx^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}(\mathbf{x})=d\mathbf{x}'=dx'^{\mu}\mathbf{e}'_{\mu}(\mathbf{x})=dx'^{\nu}\mathbf{e}'_{\nu}(\mathbf{x}) \tag{4}$$

と表される。両辺を dx'^{ν} で偏微分すれば

$$\mathbf{e}'_{\nu}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\mathbf{e}_{\mu} \tag{5}$$

これが座標基底の変換則である。

[?] 例題、2 次元デカルト座標系から 2 次元極座標系への変換

$$d\mathbf{x}=dx\mathbf{e}_x+dy\mathbf{e}_y \tag{6}$$

$(x,y)\to(r,\theta)$ への変換を考える。変換則より

$$\left\{\begin{aligned}\mathbf{e}_r&=\frac{\partial x}{\partial r}\mathbf{e}_x+\frac{\partial y}{\partial r}\mathbf{e}_y\\ \mathbf{e}_\theta&=\frac{\partial x}{\partial \theta}\mathbf{e}_x+\frac{\partial y}{\partial \theta}\mathbf{e}_y\end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned}\mathbf{e}_r&=\cos\theta\mathbf{e}_x+\sin\theta\mathbf{e}_y\\ \mathbf{e}_\theta&=-r\sin\theta\mathbf{e}_x+r\cos\theta\mathbf{e}_y\end{aligned}\right. \tag{7}$$

途中 $r^2=x^2+y^2,\tan\theta=y/x$ を用いた。$\mathbf{e}_\theta$ は原点からの距離 r に依存する。これは同じ $d\theta$ でも原点から近い場所と遠い場所で変位が異なることを意味する。