General Relativity

update: 2017 Oct. 09, author: Sho K. NAKAMURA

[?] 固有体積要素

局所慣性系での微小変位ベクトルを $d\bar{\mathbf{x}}$ と書く。これを用いて体積要素を表現すると $dV \equiv d\bar{x}^0 d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 d\bar{x}^3$ と書ける。これを一般座標系での微小変位ベクトル $d\mathbf{x}$ で表現すると、ヤコビアンを用いて

$$dV = \det\left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{1}$$

局所慣性系での計量テンソルはミンコフスキーメトリックなので、一般座標系での計量テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta} = \Lambda_\mu^{\ \bar{\alpha}}\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\bar{\beta}}_{\ \nu} \tag{2}$$

よって行列形式で書くと

$$(g_{\mu\nu}) = {}^t\Lambda\eta\Lambda \tag{3}$$

これの行列式は

$$g \equiv \det(g_\mu\nu) = \det{}^t\Lambda \underbrace{\det\eta}_{=-1} \det\Lambda = -(\det\Lambda)^2 \implies \det\Lambda = \sqrt{-g} \tag{4}$$

よって固有体積要素は

$$dV = \sqrt{-g}d^4x \tag{5}$$

と書ける。

[?] 2 次元デカルト座標での固有体積要素

$$\det g = \begin{vmatrix} -1 & & \mathbf{0} \\ & 1 & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{vmatrix} = -1 \tag{6}$$

$$\therefore\ dV = 1dxdycdt \tag{7}$$

[?] 2 次元極座標での固有体積要素

$$\det g = \begin{vmatrix} -1 & & \mathbf{0} \\ & 1 & \\ \mathbf{0} & & r^2 \end{vmatrix} = -r^2 \tag{8}$$

$$\therefore\ dV = r dr d\theta c dt \tag{9}$$