General Relativity

update: 2017 Oct. 10, author: Sho K. NAKAMURA

[?] 共変微分

あるベクトルの微分を考えたとき、

$$\partial_\mu \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \partial_\mu(\mathbf{A}^\nu(\mathbf{x})\mathbf{e}_\nu(\mathbf{x})) = (\partial_\mu(\mathbf{A}^\nu(\mathbf{x}))\mathbf{e}_\nu(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^\nu(\mathbf{x})(\partial_\mu \mathbf{e}_\nu(\mathbf{x})) \tag{1}$$

微分の定義から

$$\partial_\mu A = \lim_{d\mathbf{x}\to 0} \frac{A(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \tag{2}$$

である。このとき、位置 $\mathbf{x}$ の局所慣性系に移ったとき、位置 $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ は局所慣性系ではなくなる可能性がある。位置 $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$ の局所慣性系に移ったときには、位置 $\mathbf{x}$ は局所慣性系でなくなる可能性がある。よって位置 $\mathbf{x}, \mathbf{x}+d\mathbf{x}$ のように異なる場所では、変換則が異なるために、同じ物理量でも直接比較は不可能である。すなわち上式の微分の方法ではなく、新しい微分の仕方を定義しなければならない。

その方法として、位置 $\mathbf{x}$ での基底ベクトルの微分方法を

$$\partial_\mu \mathbf{e}_\nu(\mathbf{x}) = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(\mathbf{x})\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{x}) \tag{3}$$

のようにする。これは基底ベクトルの微分をその位置の基底ベクトルで展開し、そのときの展開係数を Γ(クリストッフェル記号) で表現したものである。
このとき $\mathbf{A}$ の微分は

$$\partial_\mu \mathbf{A} = (\partial_\mu A^\alpha + A^\nu \Gamma^\alpha_{\mu\nu})\mathbf{e}_\alpha \tag{4}$$

となる。よってこのベクトルの成分の微分

$$\nabla_\mu A^\alpha = \partial_\mu A^\alpha + A^\nu \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \equiv A^\alpha_{;\mu} \tag{5}$$

を共変微分と呼び、新に微分の方法として定義する。最初の項はこれまで通りの成分の微分、そして第二項に先ほど説明した基底の微分のお釣りがついている。

[?] クリストッフェル記号はテンソルか？

$$\partial_\mu \mathbf{e}_\nu = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\mathbf{e}_\alpha \tag{6}$$

を x' 系に変換すると

$$(\text{左辺}) = \partial_{\mu'}\mathbf{e}_{\nu'} = \partial_{\mu'}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\nu'}}\mathbf{e}_\gamma = \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}\mathbf{e}_\gamma + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\nu'}}\underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}_\gamma}{\partial x^{\mu'}}}_{\text{連鎖律}} = \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}\mathbf{e}_\gamma + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial \mathbf{e}_\gamma}{\partial x^\beta} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}}\mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\mathbf{e}_\alpha \quad (7)$$

$$(\text{右辺}) = \Gamma'^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}\mathbf{e}_\beta = \Gamma'^\beta_{\mu\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}}\mathbf{e}_\alpha \quad (8)$$

よって $\mathbf{e}_\alpha$ の係数のみを比較して

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}}\Gamma'^\beta_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \quad (9)$$

両辺に $\dfrac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}$ をかけて整理する。

$$\underbrace{\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}}}_{=\delta^{\sigma'}_{\beta'}}\Gamma'^\beta_{\mu\nu} = \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} + \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \quad (10)$$

となり、テンソルの座標変換のときにはつかなかった第一項が現れる。よってクリストッフェル記号はテンソルではない。

[?] 共変微分されたベクトル成分はテンソルか？

$$\begin{aligned}
\nabla'_\mu A^{\sigma'} &= \partial_{\mu'}A^{\sigma'} + A^{\nu'}\Gamma'^\sigma_{\mu\nu} = \partial_{\mu'}\left(\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\beta}A^\beta\right) + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho}A^\rho\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho}A^\rho\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \\
&= \partial_{\mu'}\left(\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\beta}A^\beta\right) + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho}A^\rho\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} + \delta^\gamma_\rho A^\rho\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}
\end{aligned} \quad (11)$$

$$\partial_{\mu'}\left(\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\beta}A^\beta\right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\beta}A^\beta\right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}A^\beta \quad (12)$$

$$\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}\underbrace{\left(\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\nu'}}\right)}_{\delta^{\sigma'}_{\nu'}} - \frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^{\mu'}\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\nu'}} = -\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\nu'}} \quad (13)$$

以上より

$$\begin{aligned}
\nabla'_\mu A^{\sigma'} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}A^\beta - \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho}A^\rho\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\nu'}} + A^\rho\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}}\Gamma^\alpha_{\beta\rho} \\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}A^\alpha - A^\rho\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}\delta^\alpha_\rho + A^\rho\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\Gamma^\beta_{\alpha\rho} \\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\beta} + A^\rho\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\Gamma^\beta_{\alpha\rho} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\beta}(\partial_\alpha A^\beta + A^\rho\Gamma^\beta_{\alpha\rho}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\beta}\nabla_\alpha A^\beta
\end{aligned} \quad (14)$$

よってこれは 2 階のテンソルである。

[?] スカラー量の共変微分

基底ベクトルの微分がないので、

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi \tag{15}$$

[?] 反変ベクトルの共変微分

$$\nabla_\mu (B^\nu A_\nu) = A_\nu (\nabla_\mu B^\nu) + B^\nu (\nabla_\mu A_\nu) = A_\nu (\partial_\mu B^\nu + \Gamma^\nu_{\gamma\mu} B^\gamma) + B^\nu (\nabla_\mu A_\nu) = A_\nu (\partial_\mu B^\nu) + A_\gamma \Gamma^\gamma_{\nu\mu} B^\nu + B^\nu (\nabla_\mu A_\nu) \tag{16}$$

一方で、スカラーの共変微分より

$$\nabla_\mu (B^\nu A_\nu) = \partial_\mu (B^\nu A_\nu) = B^\nu (\partial_\mu A_\nu) + A_\nu (\partial_\mu B^\nu) \tag{17}$$

$$\therefore\ \nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - A_\gamma \Gamma^\gamma_{\nu\mu} \tag{18}$$