General Relativity

update: 2017 Oct. 07, author: Sho K. NAKAMURA

[?] 反変ベクトル

あるベクトル $\mathbf{A}$ を

$$\mathbf{A} = A^\nu \mathbf{e}_\nu = A'^\mu \mathbf{e}'_\mu \tag{1}$$

と書ける。ここで座標基底の変換則より

$$\mathbf{A} = A'^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \mathbf{e}_\nu = A^\nu \mathbf{e}_\nu \implies \therefore A^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A'^\mu \tag{2}$$

座標基底の変換則と添え字が分子分母で逆になっていることから反変ベクトル"contravariant vector"と呼ぶ。今回は' のない座標基底から' のついた座標基底への変換を考えた。ではその逆はどうだろうか。

$$A^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A'^\mu \implies \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} A^\nu = \underbrace{\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}}_{\text{連鎖律}=\delta^\alpha_\mu} A'^\mu = A'^\alpha \implies A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} A^\nu \tag{3}$$

となり、' 系から' のない系への変換これもやはり座標基底変換の逆になっている。

[?] 共変ベクトル

$$|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^\mu \mathbf{e}_\mu \cdot A^\nu \mathbf{e}_\nu = A^\mu A^\nu \underbrace{\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu}_{\text{計量テンソル}} = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \tag{4}$$

大きさは' のない系でも' 系でも変わらないので

$$|\mathbf{A}|^2 = g'_{\mu\nu} A'^\mu A'^\nu \underbrace{=}_{\text{変換則}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta} A^\gamma A^\delta = \underbrace{\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma}}_{\delta^\alpha_\gamma} \underbrace{\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta}}_{\delta^\beta_\delta} g_{\alpha\beta} A^\gamma A^\delta = g_{\gamma\delta} A^\gamma A^\delta \tag{5}$$

ここで共変ベクトルを

$$A_\nu \equiv g_{\mu\nu} A^\mu = g_{\nu\mu} A^\mu \tag{6}$$

のように定義する。このベクトルの' 系への座標変換を考えよう。座標基底の変換則から

$$A'_\nu = g_{\mu'\nu'} A'^\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma} A^\gamma = \underbrace{\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma}}_{\delta^\alpha_\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} A^\gamma = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} A^\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A_\beta \tag{7}$$

これは座標基底と同様の変換則である。よってこれを改めて共変 (covariant) ベクトルと呼ぶ。この変換則に従うベクトル (テンソル) を一階の共変テンソルという。では二階の共変テンソルはどのようなものだろうか。

$$A'_{\alpha}B'_{\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}A_{\mu}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}}B_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}}A_{\mu}B_{\nu} \tag{8}$$

ここで $T_{\mu\nu} \equiv A_{\mu}B_{\nu}$ と定義すると

$$T_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}}T_{\mu\nu} \tag{9}$$

これを二階の共変テンソルの定義とする。途中、$x'^{\beta} = x^{\beta'}$ などと表記した。以降特に何もない限りこの表記を使う。
最後に $|\mathbf{A}|^2$ を再度考えよう。

$$|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu} = A_{\nu}A^{\nu} \tag{10}$$

さらに

$$A_{\nu'}A^{\nu'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\beta}}A_{\alpha}A^{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}A_{\alpha}A^{\beta} = A_{\beta}A^{\beta} \tag{11}$$

これはベクトルの大きさの二乗が改めてスカラーであり、座標変換に対して不変であることを意味する。これは同時に $dx^2 = d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}$ もスカラーであることを意味する。