General Relativity

update: 2017 Oct. 23, author: Sho K. NAKAMURA

[?] クリストッフェル記号の計算

等価原理より、必ず局所慣性系 $\bar{x}$ に移ることができるので、

$$\partial_\mu \mathbf{e}_\nu = \partial_\mu \left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\nu} \bar{\mathbf{e}}_\alpha \right) = \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \bar{\mathbf{e}}_\alpha + \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \bar{\mathbf{e}}_\alpha + \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\mu} \underbrace{\frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_\alpha}{\partial \bar{x}^\beta}}_{=0} = \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \bar{\mathbf{e}}_\alpha = \partial_\nu \left(\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \bar{\mathbf{e}}_\alpha \right) = \partial_\nu \mathbf{e}_\mu \tag{1}$$

途中、局所慣性系では $\dfrac{\partial \bar{\mathbf{e}}}{\partial \bar{x}} = 0$ となることを用いた。これは例えばデカルト座標系ではどこでも単位ベクトル $\mathbf{e}_x$ の向き・長さが変化しないことを考えれば想像できるだろう。

$$\partial_\mu \mathbf{e}_\nu = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \mathbf{e}_\alpha = \partial_\nu \mathbf{e}_\mu = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \mathbf{e}_\alpha \implies \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \tag{2}$$

が導ける。

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = (\partial_\alpha \mathbf{e}_\mu) \cdot \mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\mu \cdot (\partial_\alpha \mathbf{e}_\nu) = \Gamma^\beta_{\alpha\mu} \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\nu + \Gamma^\beta_{\alpha\nu} \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\mu = \Gamma^\beta_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu} g_{\beta\nu} \tag{3}$$

$$\therefore \partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma^\beta_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} \tag{4}$$

サイクリックに α, μ, ν を入れ替えて

$$\partial_\mu g_{\nu\alpha} = \Gamma^\beta_{\mu\nu} g_{\beta\alpha} + \Gamma^\beta_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} \partial_\mu g_{\nu\alpha} = \Gamma^\beta_{\mu\nu} g_{\beta\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \tag{5}$$

サイクリックに α, μ, ν を入れ替えかつ両辺にマイナスをつけると

$$-\partial_\nu g_{\alpha\mu} = -\Gamma^\beta_{\nu\alpha} g_{\beta\mu} - \Gamma^\beta_{\nu\mu} g_{\beta\alpha} = -\Gamma^\beta_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - \Gamma^\beta_{\mu\nu} g_{\beta\alpha} \tag{6}$$

三つの式を足し合わせて逆行列をかけることで

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} = 2\Gamma^\beta_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \implies \Gamma^\beta_{\alpha\mu} \underbrace{g_{\beta\nu} g^{\nu\gamma}}_{\delta^\gamma_\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\gamma} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}) \tag{7}$$

を得る。

局所慣性系では、計量テンソルはミンコフスキーメトリックに等しいので、この式からクリストッフェル記号は 0 である。