エータ関数

update: 2017 Sept. 03, presented by Sho K. NAKAMURA

Eta function

Eta function の定義

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-x} \tag{1}$$

から諸公式を導こう。

$$\begin{aligned}\eta(x) &= 1 - 2^{-x} + 3^{-x} - 4^{-x} + \cdots = 1 + 2^{-x} + 3^{-x} + 4^{-x} + \cdots - 2(2^{-x} + 4^{-x} + \cdots) = \zeta(x) - 2 \cdot 2^{-x}(1 + 2^{-x} + 3^{-x} + \cdots) \\ &= \zeta(x) - 2^{1-x}\zeta(x) = \zeta(x)(1 - 2^{1-x}) \end{aligned} \tag{2}$$

となり、エータ関数とゼータ関数の関係式が導けた。次に以下の積分を変形していくことを考える。

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx - \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx = \int_0^\infty \frac{2x^{s-1}}{e^{2x} - 1} dx \tag{3}$$

$y = 2x$ とおくと

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx - \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx = \int_0^\infty \frac{2 \cdot 2^{1-s} y^{s-1}}{e^y - 1} \frac{1}{2} dy = 2^{1-s} \int_0^\infty \frac{y^{s-1}}{e^y - 1} dy \underbrace{=}_{y=x\text{ と置換}} = 2^{1-s} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \\ &\Longrightarrow (1 - 2^{1-s}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx \end{aligned} \tag{4}$$

ゼータ関数の定義式より

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)\Gamma(s) \underbrace{=}_{(2)} \eta(s)\Gamma(s) \Longrightarrow \eta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx \tag{6}$$

と書ける。

Bibliography

[1] ベータ関数・ガンマ関数・ゼータ関数・イータ関数：http://shadowacademy.web.fc2.com/betagammazetaeta.html

[2] のんびり個体物理学：http://solidstatephysics.blog.fc2.com/blog-entry-10.html