Chandrasekhar's mass limit

update:May. 20. 2012, presented by Sho Nakamura

完全縮退電子気体の状態方程式

縮退圧によって支えられる星々(白色矮星、中性子星) には、縮退圧によって支えることができる星の質量に上限があることが知られている。特に白色矮星について、この質量限界のことを Chandrasekhar's mass limit と呼ぶ。ここでは白色矮星の場合について数値積分を行うことにより、Chandrasekhar の限界質量を求めることを考える。白色矮星の質量は核子 (陽子・中性子) の量 (数) により与えられるが、その強い重力による崩壊から以下では白色矮星を支え平衡を維持するのは、電子の縮退圧力によるものと考える。
一般に完全電離電子気体ではその圧力はイオン (核子) 気体と電子気体の分圧の和になっている。ここでは電子気体は縮退し、核子気体は縮退していると考える。このとき圧力は電子気体の縮退圧が圧倒的に大きいとして

$$P_{\rm tot} = P_{\rm ion} + P_{\rm e} \simeq P_{\rm e} \tag{1}$$

が良い近似で成り立っているものとする。完全に縮退した電子気体の状態方程式は

$$P = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} f(x) \tag{2}$$

で与えられる。ここで

$$f(x) = x(2x^2 - 3)\sqrt{x^2+1} + 3\sinh^{-1} x \tag{3}$$

$$x \equiv \frac{P_{\rm max}}{m_e c} = \frac{h}{m_e c}\left(\frac{3}{8\pi} n_e\right)^{1/3} \tag{4}$$

などである。
今、単純に白色矮星の化学組成が一様であるとして、その水素の質量比を X, ヘリウムの質量比を Y, その他の元素の質量比を $X_n (n > 4)$ などと表すことにする。白色矮星は完全電離ガスにより形成されていると考えて、単位体積中の電子の数は

$$n_e \simeq \frac{\rho X}{m_p} + 2\frac{\rho Y}{4m_p} + \sum_{n>4}^{n_{\rm max}} \frac{n}{2}\frac{\rho X_n}{n m_p} = \frac{\rho}{m_p}\left(X + \frac{Y}{2} + \frac{Z}{2}\right) = \frac{\rho}{2m_p}(1+X) \equiv \frac{\rho}{\mu_e m_p} \tag{5}$$

で与えられる。ここで

$$X + Y + Z = 1,\ \ Z = \sum_{n>4}^{n_{\rm max}} X_n,\ \ \mu_e = \frac{2}{1+X} \tag{6}$$

などである。ここで μ_e は自由電子一個あたりの平均分子量である。(4), (5) 式より

$$x = \underbrace{\frac{h}{m_e c}}_{\equiv \lambda_c}\left(\frac{3}{8\pi\mu_e m_p}\right)^{1/3} \rho^{1/3} = A\rho^{1/3} \tag{7}$$

と書ける。途中の $\lambda_c = h/(m_e c)$ は電子コンプトン波長である。同様に P も

$$P = \frac{\pi m_e c^2}{3\lambda_c^3} f(x) = B f(x) \tag{8}$$

と書くことにする。(??) 式より、$P = Bf((A\rho^{1/3}))$ と書ける。これは polytrope の時と違い、ρ の係数である K が介入しないため、質量と半径とを独立に任意に与えることができない。すなわち、状態方程式は polytrope 的だが、パラメータ K は状態方程式によって与えることができるため、星の構造を決めるには半径 or 質量のどちらか 1 つを与えてやればよい。今後の計算のために以下を示しておく。

$$(3) \implies \frac{df}{dx} = (2x^3 - 3)\sqrt{x^2+1} + 4x^2\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2(2x^2-3)}{\sqrt{x^2+1}} + 3\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x \tag{9}$$

ここで $y = \sinh^{-1} x$ とおくと、逆関数なのでこれは $x = \sinh y$ とも書ける。よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{df}{dx} &= (2x^2-3)\sqrt{x^2+1} + 4x^2\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2(2x^2-3)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{3}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{(2x^2-3)(1+x^2) + 4x^2(1+x^2) + x^2(2x^2-3) + 3}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2x^2 - 3 + 2x^4 - 3x^2 + 4x^2 + 4x^4 + 2x^4 - 3x^2 + 3}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{8x^4}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned} \tag{11}$$

静水圧平衡の式から数値積分を実行する式への変形

重力と圧力勾配のつりあいで形成されている球対称な恒星系の静水圧平衡の式

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{12}$$

の式変形を行い、数値的に物理量が求められる式を導出する。

$$(8) \implies \frac{dP}{dr} = B\frac{df}{dr} = B \overbrace{\frac{dx}{dr}}^{(7)} \underbrace{\frac{df}{dx}}_{(7),(9)} = \frac{1}{3}AB\rho^{-\frac{2}{3}}\frac{d\rho}{dr}\frac{8A^4\rho^{4/3}}{\sqrt{1+A^2\rho^{2/3}}} \tag{13}$$

ここで、

$$z^2 \equiv x^2 + 1,\ \ \varphi \equiv \frac{z}{z_c},\ \ \zeta \equiv \frac{r}{\alpha},\ \ \alpha \equiv \sqrt{\frac{2B}{\pi G}\frac{A^3}{z_c}} \tag{14}$$

などを定義しておく。ここで添字の c は星の中心での物理量を意味する定数である。

$$\varphi^2 z_c^2 \underbrace{=}_{(7)} A^2\rho^{2/3} + 1 \underbrace{\implies}_{\text{両辺 } r \text{ 微分}} 2z_c^2\varphi\frac{d\varphi}{dr} = \frac{2}{3}A^2\rho^{-\frac{1}{3}}\frac{d\rho}{dr} \tag{15}$$

これらより

$$
\frac{dP}{dr} = \frac{1}{3}AB\rho^{-\frac{2}{3}}3z_c^2\varphi\frac{1}{\alpha}\frac{d\varphi}{d\zeta}\frac{\rho^{1/3}}{A^2}\frac{8A^4\rho^{4/3}}{\varphi z_c} = 8A^3Bz_c\frac{\rho}{\alpha}\frac{d\varphi}{d\zeta} \underbrace{\Longrightarrow}_{\times r^2/\rho} \frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr} = 8A^3Bz_c\alpha\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}
$$

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{両辺 } r \text{ 微分}} \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = 8A^3Bz_c\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right) \underbrace{\Longrightarrow}_{\times 1/r^2} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) &= \frac{8A^3Bz_c}{\alpha^2}\frac{1}{\zeta^2}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right) \\
&= \frac{4\pi Gz_c^3}{A^3}\frac{1}{\zeta^2}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore (12) \quad \Longrightarrow \quad \frac{4\pi Gz_c^3}{A^3}\frac{1}{\zeta^2}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right) = -4\pi G\rho = -4\pi G\left(\frac{\varphi^2z_c^2-1}{A^2}\right)^{3/2} \qquad (17)
$$

$$
\Longrightarrow \quad \frac{1}{\zeta^2}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right) = -\left(\varphi^2 - \frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2} \qquad (18)
$$

となる。

質量と半径

星の全質量 M と半径 R を求める。ここでの星の半径とは (18) 式を中心から数値積分していったときに、最初に密度が零点となるところとする。すなわち $\zeta = \zeta_1$ において $x_1 = 0, z_1 = 1, \varphi = 1/z_c$ である。ここで、添字の 1 は半径 R における量を意味している。(17) の途中式より

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^R 4\pi r^2\rho\, dr = -\int_0^R 4\pi r^2\frac{z_c^3}{A^3}\frac{1}{\zeta^2}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)dr \underbrace{=}_{\zeta=r/\alpha} -\int_0^{R/\alpha} 4\pi(\zeta\alpha)^2\frac{z_c^3}{A^3}\frac{1}{\zeta^2}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)\alpha d\zeta \\
&= -4\pi\alpha^3\frac{z_c^3}{A^3}\int_0^{R/\alpha}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)d\zeta = -4\pi\left(\frac{2B}{\pi G}\right)^{3/2}A^6\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)_1 \\
&= -4\pi\left(\frac{2}{\pi G}\right)^{3/2}\left(\frac{\pi m_ec^2}{3\lambda_c^3}\right)^{3/2}\lambda_c^6\left(\frac{3}{8\pi\mu_em_p}\right)^2\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)_1 = -4\pi\left(\frac{2}{\pi G}\right)^{3/2}\left(\frac{\pi m_ec^2}{3\lambda_c^3}\right)^{3/2}\lambda_c^6\left(\frac{3}{8\pi\mu_em_p}\right)^2\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)_1 \\
&= -2^2\pi\left(\frac{2m_ec^2}{3G}\right)^{3/2}\lambda_c^{3/2}\left(\frac{3}{8\pi\mu_em_p}\right)^2\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)_1 = \frac{9}{64\pi}\frac{1}{m_p^2}\left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2\left(\frac{2}{3}\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(-\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)_1 \qquad (19)
\end{aligned}
$$

$$
R = \alpha\zeta_1 = \sqrt{\frac{2B}{\pi G}}\frac{A^3}{z_c}\zeta_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi G}}\left(\frac{\pi m_e^4c^5}{3h^3}\right)^{1/2}\frac{h^3}{m_e^3c^3}\frac{3}{8\pi\mu_em_p}\frac{\zeta_1}{z_c} = \sqrt{\frac{6h^3}{cG}}\frac{1}{8\pi\mu_em_em_p}\frac{\zeta_1}{z_c} \qquad (20)
$$

(19) 式より、星の全質量は縮退している電子の質量 m_e に依存しないことがわかる。一方で、(20) 式で求まった半径は m_e に反比例している。(18) 式のある一つの z_c の解について求めるとき、縮退している気体が電子 m_e のような白色矮星である場合と、中性子 $m_n(\simeq m_p)$ のような中性子星では、星の全質量は同じであっても半径が異なることがわかる。今の例では中性子星の半径は白色矮星のおよそ $m_e/m_n \simeq 1/1800$ 倍も小さいことがわかる。

Runge-Kutta による数値積分

(18) 式を単純に積分すればそれが答えとなるわけだが、計算の途中で $1/\zeta$ が入ってくることは、式の形から明らかであろう。よって、数値計算は中心の近傍から始めなくてはならない。そのために (18) 式を星の中心 $\zeta = 0$ において、$\varphi(\zeta)$ を $\varphi_0 = 1, d\varphi/d\zeta_0 = 0$ の条件の下で展開し、その近似式の値から数値計算を行うことを考える。

$$\begin{aligned}(18)\text{ 式左辺} &= \frac{1}{\zeta^2}\frac{d}{d\zeta}\left\{\zeta^2\frac{d}{d\zeta}\left(1+0+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}\right|_0\zeta^2+\frac{1}{3!}\left.\frac{d^3\varphi}{d\zeta^3}\right|_0\zeta^3+\frac{1}{4!}\left.\frac{d^4\varphi}{d\zeta^4}\right|_0\zeta^4+\cdots\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\zeta^2}\frac{d}{d\zeta}\left(\left.\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}\right|_0\zeta^3+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^3\varphi}{d\zeta^3}\right|_0\zeta^4+\frac{1}{3!}\left.\frac{d^4\varphi}{d\zeta^4}\right|_0\zeta^5+\cdots\right) = 3\left.\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}\right|_0+2\left.\frac{d^3\varphi}{d\zeta^3}\right|_0\zeta+\frac{5}{6}\left.\frac{d^4\varphi}{d\zeta^4}\right|_0\zeta^2+\cdots\end{aligned} \tag{21}$$

そして、

$$\begin{aligned}&\left.\left(\varphi^2-\frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2}\right|_0 = \left(1-\frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2},\quad \frac{d}{d\zeta}\left.\left(\varphi^2-\frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2}\right|_0 = \left\{\frac{3}{2}\left(\varphi^2-\frac{1}{z_c^2}\right)^{1/2}2\varphi\frac{d\varphi}{d\zeta}\right\}_0 = 0, \\ &\frac{d^2}{d\zeta^2}\left.\left(\varphi^2-\frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2}\right|_0 = 3\left\{\frac{1}{2}\left(\varphi^2-\frac{1}{z_c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}2\varphi^2\left(\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)^2+\left(\varphi^2-\frac{1}{z_c^2}\right)^{1/2}\left(\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)^2+\left(\varphi^2-\frac{1}{z_c^2}\right)^{1/2}\varphi\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}\right\}_0 \\ &\qquad = 3\left(1-\frac{1}{z_c^2}\right)^{1/2}\left.\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}\right|_0\end{aligned} \tag{22}$$

などより

$$(18)\text{ 式右辺} = -\left(1-\frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2}-\frac{3}{2!}\left(1-\frac{1}{z_c^2}\right)^{1/2}\left.\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}\right|_0\zeta^2-\cdots \tag{23}$$

(21), (23) 式の ζ の次数を比べることにより

$$\left.\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}\right|_0 = -\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2},\quad \left.\frac{d^3\varphi}{d\zeta^3}\right|_0 = 0,\quad \left.\frac{d^4\varphi}{d\zeta^4}\right|_0 = -\frac{9}{5}\left(1-\frac{1}{z_c^2}\right)^{1/2}\left.\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}\right|_0 = \frac{3}{5}\left(1-\frac{1}{z_c^2}\right)^2 \tag{24}$$

$$\therefore \varphi = 1-\frac{1}{3\cdot 2!}\left(1-\frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2}\zeta^2+\frac{3}{5\cdot 4!}\left(1-\frac{1}{z_c^2}\right)^2\zeta^4 = 1-\frac{q^3}{6}\zeta^2+\frac{q^4}{40}\zeta^4\quad\left(q\equiv\left(1-\frac{1}{z_c^2}\right)^{1/2}\right) \tag{25}$$

(18) 式を

$$\frac{1}{\zeta^2}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^2\frac{d\varphi}{d\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta^2}\left(2\zeta\frac{d\varphi}{d\zeta}+\zeta^2\frac{d^2\varphi}{d^2\zeta}\right) = \frac{2}{\zeta}\frac{d\varphi}{d\zeta}+\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} = -\left(\varphi^2-\frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2} \implies \frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} = -\frac{2}{\zeta}\frac{d\varphi}{d\zeta}-\left(\varphi^2-\frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2} \tag{26}$$

のように変形し、$\varphi = y_1, d\varphi/d\zeta = y_2$ とおいて

$$\frac{d}{d\zeta}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{2}{\zeta}y_2-\left(y_1^2-\frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2} \end{pmatrix} \tag{27}$$

この連立微分方程式をいろいろな $z_c^2 > 1$ に対して数値的に積分すればよい。縦軸を恒星の半径 $\mu_e R$, 横軸を恒星の質量 $(\mu_e/2)^2 M$ にとり、図示したものが fig1 である。
fig1 より、有限の質量で半径が 0 に漸近することがわかる。この限界質量がおよそ

$$M_{\mathrm{Ch}} = \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 1.43 \times M_\odot \tag{28}$$

であり、これをチャンドラセカールの限界質量と呼ぶ。

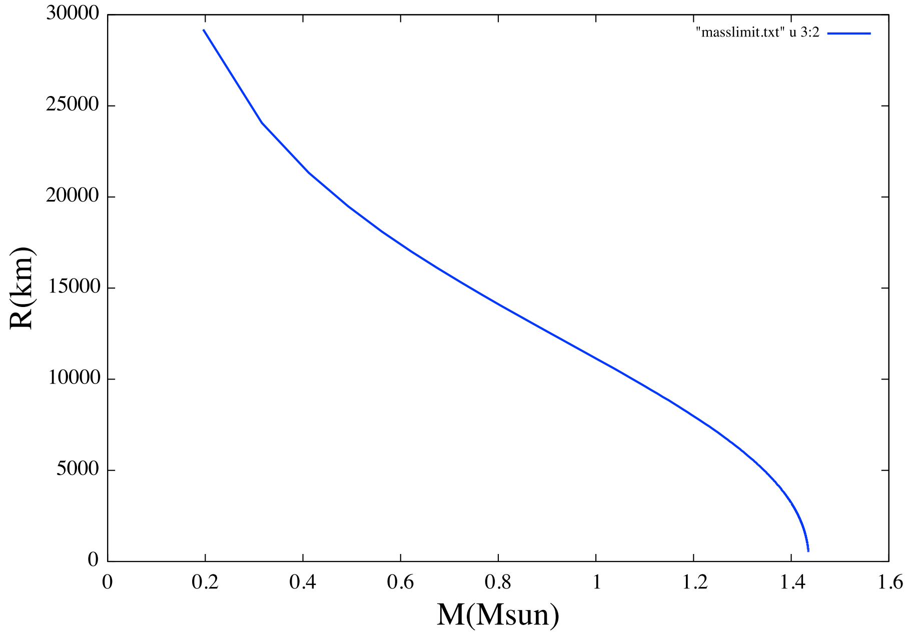

fig 1: 縦軸:半径, 横軸:質量.

Bibliography

[1] 東北大学理学部天文学コース 天体物理学実習 II (担当教官：李准教授) 演習プリント