超新星残骸の進化

2017 Sept. 14, author: Sho K. NAKAMURA

Sedov-Taylor 解

球対称に爆風が広がっていくときの、物理量の時間進化を考える。球対称なので $\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0, v_\theta = v_\varphi = 0$ とする。すると基礎方程式は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho v_r) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) + v_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = 0 \tag{3}$$

のように書くことができる。最初から相似解を用いた解を模索する。無次元量 ξ を

$$\xi = Ar^a t^b \tag{4}$$

と定義し、ρ, v_r, P が ξ のみに依存する解を求める。解の境界 (爆風の衝撃波面) の位置を $R(t)$ とすると

$$\xi_0 = AR(t)^a t^b \tag{5}$$

さらにパラメータとして $\lambda = \xi/\xi_0$ を導入する。λ は $0 \sim 1$ のパラメータである。ρ, v_r, P の無次元量として ρ^*, v_r^*, P^* とすると

$$v_r = v^*\frac{r}{t},\ \rho = \rho^*\rho_0,\ P = P^*\rho_0\left(\frac{r}{t}\right)^2 \tag{6}$$

である。偏微分はそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial\lambda}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\lambda} = \frac{b\lambda}{t}\frac{\partial}{\partial\lambda},\ \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\lambda} = \frac{a\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial\lambda} \tag{7}$$

のように書き換えられる。

連続の式より

$$\frac{\partial(\rho_0\rho^*)}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho_0\rho^*\frac{r}{t}v^*\right) = 0 \implies \frac{\partial\rho^*}{\partial t} + \frac{1}{r^2 t}\frac{\partial}{\partial r}(\rho^* v^* r^3) = \frac{\partial\rho^*}{\partial t} + \frac{1}{r^2 t}\left(3r^2\rho^* v^* + r^3 v^*\frac{\partial\rho^*}{\partial r} + r^3\rho^*\frac{\partial v^*}{\partial r}\right) = 0$$

$$\implies \frac{b\lambda}{t}\frac{\partial\rho^*}{\partial\lambda} + \frac{3\rho^* v^*}{t} + \frac{rv^*}{t}\frac{a\lambda}{r}\frac{\partial\rho^*}{\partial\lambda} + \frac{r\rho^*}{t}\frac{a\lambda}{r}\frac{\partial v^*}{\partial\lambda} = 0 \implies 3v^* + (b + av^*)\frac{\partial\ln\rho^*}{\partial\ln\lambda} + a\frac{\partial v^*}{\partial\ln\lambda} = 0 \tag{8}$$

運動方程式より

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v^*\frac{r}{t}\right)+v^*\frac{r}{t}\frac{\partial}{\partial r}\left(v^*\frac{r}{t}\right)+\frac{1}{\rho_0\rho^*}\frac{\partial}{\partial r}\left(P^*\rho_0\frac{r^2}{t^2}\right)=-\frac{v^*r}{t^2}+\frac{r}{t}\frac{\partial v^*}{\partial t}+\frac{v^{*2}r}{t^2}+\frac{v^*r^2}{t^2}\frac{\partial v^*}{\partial r}+\frac{r^2}{\rho^*t^2}\frac{\partial P^*}{\partial r}+\frac{2r}{\rho^*t^2}P^*=0$$

$$\Longrightarrow\ -v^*+b\lambda\frac{\partial v^*}{\partial \lambda}+v^{*2}+v^*a\lambda\frac{\partial v^*}{\partial \lambda}+\frac{a\lambda}{\rho^*}\frac{\partial P^*}{\partial \lambda}+\frac{2P^*}{\rho^*}=0$$

$$\Longrightarrow\ v^*(v^*-1)+(b+av^*)\frac{\partial v^*}{\partial \ln\lambda}+\frac{2P^*}{\rho^*}+\frac{a}{\rho^*}\frac{\partial P^*}{\partial \ln\lambda}=0 \tag{9}$$

エネルギー方程式より

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right)+v_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P^*\rho_0 r^2/t^2}{\rho^{*\gamma}\rho_0^\gamma}\right)+v^*\frac{r}{t}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P^*\rho_0 r^2/t^2}{\rho^{*\gamma}\rho_0^\gamma}\right)$$

$$=\frac{\rho_0 r^2}{\rho_0^\gamma}\left\{\frac{-2}{t^3}\frac{P^*}{\rho^{*\gamma}}+\frac{1}{t^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P^*}{\rho^{*\gamma}}\right)\right\}+\frac{\rho_0}{\rho_0^\gamma}v^*\frac{r}{t^3}\left\{2r\frac{P^*}{\rho^{*\gamma}}+r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho^{*\gamma}}\right)\right\}=0$$

$$\Longrightarrow\ -2\frac{P^*}{\rho^{*\gamma}}+b\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{P^*}{\rho^{*\gamma}}\right)+v^*\left\{\frac{2P^*}{\rho^{*\gamma}}+a\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{P^*}{\rho^{*\gamma}}\right)\right\}=0$$

$$\Longrightarrow\ 2(v^*-1)\frac{P^*}{\rho^{*\gamma}}+\frac{b\lambda}{\rho^{*\gamma}}\frac{\partial P^*}{\partial\lambda}+b\lambda(-\gamma)\rho^{*,-\gamma-1}\frac{\partial\rho^*}{\partial\lambda}+a\lambda v^*\frac{1}{\rho^{*\gamma}}\frac{\partial P^*}{\partial\lambda}+a\lambda v^*P^*(-\gamma)\rho^{*,-\gamma-1}\frac{\partial\rho^*}{\partial\lambda}=0$$

$$\Longrightarrow\ 2(v^*-1)+(b+av^*)\frac{\partial\ln P^*}{\partial\ln\lambda}-\gamma(b+av^*)\frac{\partial\ln\rho^*}{\partial\ln\lambda}=0 \tag{10}$$

これらの微分方程式を境界条件のもとで解けばよい。だがこの解を解いて、全てを説明するのは難しいので、特徴のある量だけを説明する。独立変数 r,t と系のパラメータ $\rho_0 E_0$ から無次元量を作る。

$$\xi=\rho_0^\alpha E_0^\beta r^\gamma t^\delta \tag{11}$$

この式の単位は $g^\alpha cm^{-3\alpha} g^\beta cm^{2\beta} s^{-2\beta} cm^\gamma s^\delta$ より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ -3\alpha+2\beta+\gamma=0-2\beta+\delta=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\ \alpha=\frac{1}{5}\gamma,\ \beta=-\frac{1}{5}\gamma,\ \delta=-\frac{2}{5}\gamma \tag{12}$$

$\gamma=1$ とすると

$$\xi=\left(\frac{\rho_0}{E_0}\right)^{1/5} r t^{-2/5} \tag{13}$$

(4) 式と見比べて

$$a=1,\ b=-\frac{2}{5},\ A=\left(\frac{\rho_0}{E_0}\right)^{1/5} \tag{14}$$

よって衝撃波の半径は

$$R(t)=\xi_0\left(\frac{\rho_0}{E_0}\right)^{1/5} t^{2/5} \tag{15}$$

その膨張速度は

$$D(t) = \frac{dR}{dt} = \frac{2}{5}\xi_0 \left(\frac{\rho_0}{E_0}\right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5}\frac{R(t)}{t} \tag{16}$$

また、衝撃波面 $R(t)$ $(\lambda = 1)$ における Rankine-Hugoniot の関係式より

$$\rho_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0 \tag{17}$$

$$v_1 = D(t) - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}D(t) = \frac{2}{\gamma+1}D(t) = \frac{4}{5}\frac{1}{\gamma+1}\xi_0\left(\frac{\rho_0}{E_0}\right)^{1/5} t^{-3/5} \tag{18}$$

$$p_1 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 D^2(t) = \frac{8}{25}\frac{\rho}{\gamma+1}\xi_0^2\left(\frac{\rho_0}{E_0}\right)^{2/5} t^{-6/5} \tag{19}$$

などを得る。最後にシミュレーション結果を図示しておく。

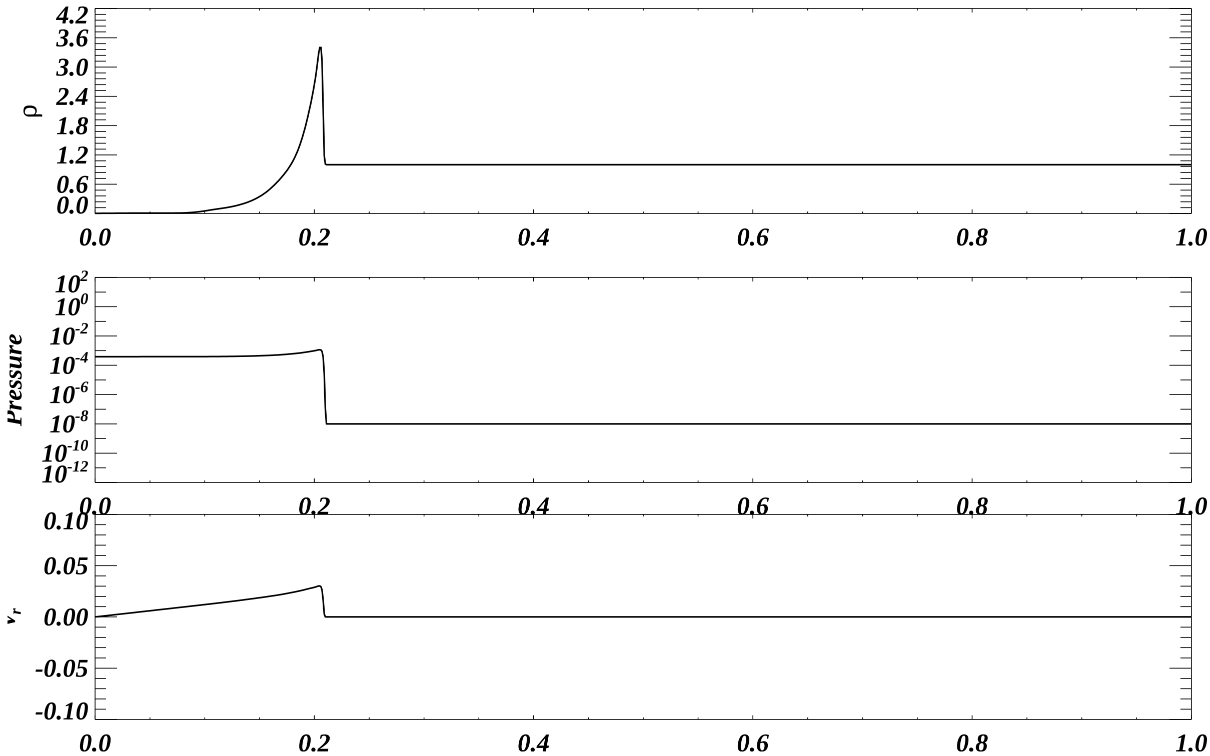

fig 1: シミュレーション結果。上から順に密度、圧力、動径方向の速度分布。

Bibliography

[1] 東北大学理学部物理学科, 宇宙地球物理学科 天体物理学 III (担当教官：李ウミン) 授業プリント

[2] CANS 旧 website: http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/netlab/cans/cans1d/frame.html