

Basic equations

磁気流体中を伝播する波動について考えよう。まずは磁気流体の基礎方程式をおさらいする。

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

z 方向に一様重力、角速度 Ω での回転も考慮した運動方程式

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \rho g \mathbf{e}_z - 2\rho \Omega \times \mathbf{v} \quad (2)$$

流れに沿ってエネルギーのやり取りが無視できるような場合のエネルギー方程式 (adiabatic flow)

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = \frac{1}{\rho^\gamma} \frac{Dp}{Dt} - \frac{\gamma p}{\rho^{\gamma+1}} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \implies \frac{Dp}{Dt} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \implies \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) p \right\} - \frac{\gamma p}{\rho} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho \right\} = 0 \quad (3)$$

ideal MHD 近似をした Induction equation

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

magnetic Gauss's law.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

さらに変位電流を無視した、いわゆる Ampere's law.

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \quad (6)$$

理想気体の状態方程式

$$p = nk_B T = \frac{\rho}{\mu m_p} k_B T \implies T = \frac{\mu m_p p}{k_B \rho} \quad (7)$$

いくつか説明を加えておこう。運動方程式にコリオリ力があるのに遠心力がないのは、重力の項にそれを組み込んだからである。また「流れに沿ってエネルギーのやり取りが無視できる」とは、より厳密に言えば (thermal conduction, ohmic heating, radiative cooling, wave heating などによる) Energy loss を \mathcal{L} 、波の周期を τ としたときに、 $\tau \ll p/\mathcal{L}$ が成り立つことを意味する。

一様磁場 \mathbf{B}_0 中に静水圧平衡状態にある流体の系があり、そこに無限小の摂動が加わったとする。平衡状態のときの物理量には添字 0 を、摂動量には添字 1 をつけて方程式を解いていく。このとき、摂動量の 2 次以上の項は無視して、線形化を行う。

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1, \quad p = p_0 + p_1, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$$

などとする。これを基礎方程式に代入。

$$(1) \implies \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1 + \rho_1 \mathbf{v}_1) = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) = 0 \quad (8)$$

$$(2) \implies \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 - \rho_1 g \mathbf{e}_z - 2\rho_0 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_1 \quad (9)$$

断熱条件の場合に成り立つ式は

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0 + p_1}{\rho_0 + \rho_1} \simeq (p_0 + p_1) \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) = \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_0 p_1}{\rho_0^2} - \frac{p_1}{\rho_0} \quad (10)$$

より

$$(7) \implies \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) p_0 - C_s^2 \left\{ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \rho_0 \right\} = 0 \quad (11)$$

ここで

$$C_s^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma k_B T_0}{\mu m_p} \quad (12)$$

は平衡状態における音速である。

$$(4) \implies \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad (13)$$

$$(5) \implies \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \quad (14)$$

さらに一様重力場中で流れの無い平衡状態を成していたことから、平衡状態での運動方程式の z 成分は静水圧平衡の式となる。一様温度を仮定すると

$$0 = -\frac{\partial p_0}{\partial z} - \rho_0 g = -\frac{k_B T_0}{\mu m_p} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} - \rho_0 g \implies \rho_0 = \text{const} \times e^{-z/\Lambda} \quad (15)$$

圧力も

$$p_0 \stackrel{(7)}{=} \frac{k_B}{\mu m_p} \rho_0 T_0 = \text{const} \times e^{-z/\Lambda} \quad (16)$$

と表される。ここで

$$\Lambda = \frac{k_B T_0}{\mu m_p g} = \frac{p_0}{g \rho_0} = \frac{C_s^2}{\gamma g} \quad (17)$$

は scale-height と呼ばれる量である。これから式を解いていくわけだが、以下では ρ_0, p_0 は (15), (16) 式に従うと仮定する。(9) 式の両辺をオイラー-時間微分し変形を行ってこよう。

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} = -\nabla \left[-(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) p_0 + C_s^2 \left\{ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \rho_0 \right\} \right] + \frac{1}{4\pi} [\nabla \times \{ \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \}] \times \mathbf{B}_0 - g \{ -(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \rho_0 - \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) \} \mathbf{e}_z - 2\rho_0 \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \text{(第1項と第3項)} \quad \xrightarrow{(11),(15),(16)} -\nabla \left\{ \frac{v_{1z}}{\Lambda} p_0 - C_s^2 \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) \right\} + g \left\{ -v_{1z} \frac{\rho_0}{\Lambda} + \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) \right\} \mathbf{e}_z \\ & = -\frac{1}{\Lambda} \left(p_0 \nabla v_{1z} - \frac{v_{1z}}{\Lambda} p_0 \mathbf{e}_z \right) + C_s^2 \left\{ (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) \left(-\frac{1}{\Lambda} \rho_0 \right) \mathbf{e}_z + \rho_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) \right\} - \frac{g}{\Lambda} v_{1z} \rho_0 \mathbf{e}_z + g \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{e}_z \\ & = -\rho_0 g \nabla v_{1z} + \frac{\rho_0^2 g^2}{p_0} v_{1z} \mathbf{e}_z + C_s^2 \left\{ -\frac{\rho_0^2 g}{p_0} (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{e}_z + \rho_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) \right\} - \frac{\rho_0^2 g^2}{p_0} v_{1z} \mathbf{e}_z + g \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{e}_z \\ & = -\rho_0 g \nabla v_{1z} - \gamma \rho_0 g (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{e}_z + C_s^2 \rho_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) + g \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (19)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) - (\gamma - 1) g (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{e}_z - g \nabla v_{1z} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{4\pi \rho_0} [\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0))] \times \mathbf{B}_0 \quad (20)$$

となる。摂動量 \mathbf{v}_1 を平面波解を仮定して解く (1つのフーリエモードについて解くと考えてもよい)。すなわち

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_1 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \quad (21)$$

とすると

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -i\omega \mathbf{v}_1, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1, \quad \nabla v_{1z} = i\mathbf{k} v_{1z}$$

などより

$$\omega^2 \mathbf{v}_1 = C_s^2 \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) + i(\gamma - 1) g (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{e}_z + i g \mathbf{k} v_{1z} - 2i\omega \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_1 + \frac{1}{4\pi \rho_0} [\mathbf{k} \times \{ \mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) \}] \times \mathbf{B}_0 \quad (22)$$

となる。これは \mathbf{v}_1 の固有値方程式であるから、 $\mathbf{v}_1 \neq 0$ となる場合を考えて解いてやればよい。すると $\omega = \omega(\mathbf{k})$ の形の方程式が得られる。これを分散関係式 (dispersion relation) という。(22) 式は一般的な式なので、解くのは非常に面倒 (というより解けないに等しい)。特定の条件下において (22) 式を解いていくことにする。大切なのは物理的な意味を理解することにある。

位相速度と群速度

(22) 式を解く前に大切な量について触れておこう。ある波数 \mathbf{k} の波が伝播する速度は位相速度 (phase velocity)

$$\mathbf{v}_p = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}} \quad (23)$$

で与えられる。ここで、 $\hat{\mathbf{k}}$ は \mathbf{k} 方向の単位ベクトルである。しかし実際の波は色々な波数の波が重ね合わさった、波束 (wave packet) の形で伝播することが多い。波束は群速度 (group velocity)

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \quad (24)$$

で伝播することが知られている。これは波のエネルギーが伝播する速度を表しており、一般的には位相速度と異なる大きさと方向を持つ。位相速度が波長によって異なる値を持つ場合、これを分散的 (dispersive) であるという。また ω が k に比例するような形の場合 (eg, 電磁波など) には位相速度と群速度が同じになり、これを非分散的 (non-dispersive) であるという。

sound waves

$g = B_0 = \Omega = 0$ とする。すると (22) 式より

$$\omega^2 \mathbf{v}_1 = C_s^2 \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \implies \omega^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = C_s^2 k^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \quad (25)$$

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 \neq 0$ (すなわち $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 \neq 0$) とし、両辺の 2 乗を外すにあたり外向きの波のみ考えるとすると

$$\omega = k C_s \quad (26)$$

を得る。これが音波 (sound wave, acoustic wave) の分散関係式である。(23), (24), (26) 式より音波の位相速度と群速度は

$$v_p = v_g = C_s \quad (27)$$

で同じである。途中 $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 \neq 0$ を仮定したが、これは圧縮性流体の条件であるから音波の復元力は圧縮により生じる圧力勾配の力である。また、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 \neq 0$ からわかるように縦波である。

具体例について挙げておく。 $\gamma = 5/3$, $m = 0.5 m_p$ (fully ionized hydrogen gas) のとき、 $C_s \simeq 1.66 \times 10^4 T_0^{1/2} (\text{cm s}^{-1})$ である。 $T_0 \sim 10^4$ (恒星大気) では $C_s \sim 16 (\text{km s}^{-1})$ 、 $T_0 \sim 10^8$ (銀河団プラズマ) では $C_s \sim 1.6 \times 10^3 (\text{km s}^{-1})$ である。銀河団プラズマの中を運動する銀河もこのくらいの固有速度 (proper motion velocity) を持っていると考えてよい。

magnetic waves

直観的な議論から入る。磁場中のプラズマには磁気張力 $B^2/4\pi$ がはたらく。張力 T がはたらく線密度 ρ のゴムひもでは波が位相速度 $v = (T/\rho)^{1/2}$ で伝播することから、プラズマ中を磁場に沿って位相速度

$$v_A = \frac{B}{(4\pi\rho)^{1/2}} \quad (28)$$

で伝播する横波が存在すると考えられる。この速度をアルヴェーン速度 (Alfven speed) という。

$$v_A = 2.8 \times 10^5 \left(\frac{B}{1 \mu\text{G}} \right) \left(\frac{n_0}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/2} (\text{cm s}^{-1}) \quad (29)$$

より、銀河団プラズマでは $v_A \sim 3(\text{km s}^{-1})$ である。

磁場中のプラズマには磁気圧 $p_m = B^2/(8\pi)$ もはたらくので、磁気圧により復元力が生まれて音波のような縦波が発生することも考えれる。ただし断熱流体の条件 $p/\rho^\gamma = \text{const}$ の γ は、今の場合には磁束保存より

$$\frac{B}{\rho} = \text{const} \implies \frac{p_m}{\rho^2} = \text{const} \quad (30)$$

なので、磁気圧しかはたらかない流体では $\gamma = 2$ である。このことから、この波の位相速度は

$$\left(\frac{2p_m}{\rho} \right)^{1/2} = \frac{B}{(4\pi\rho)^{1/2}} \quad (31)$$

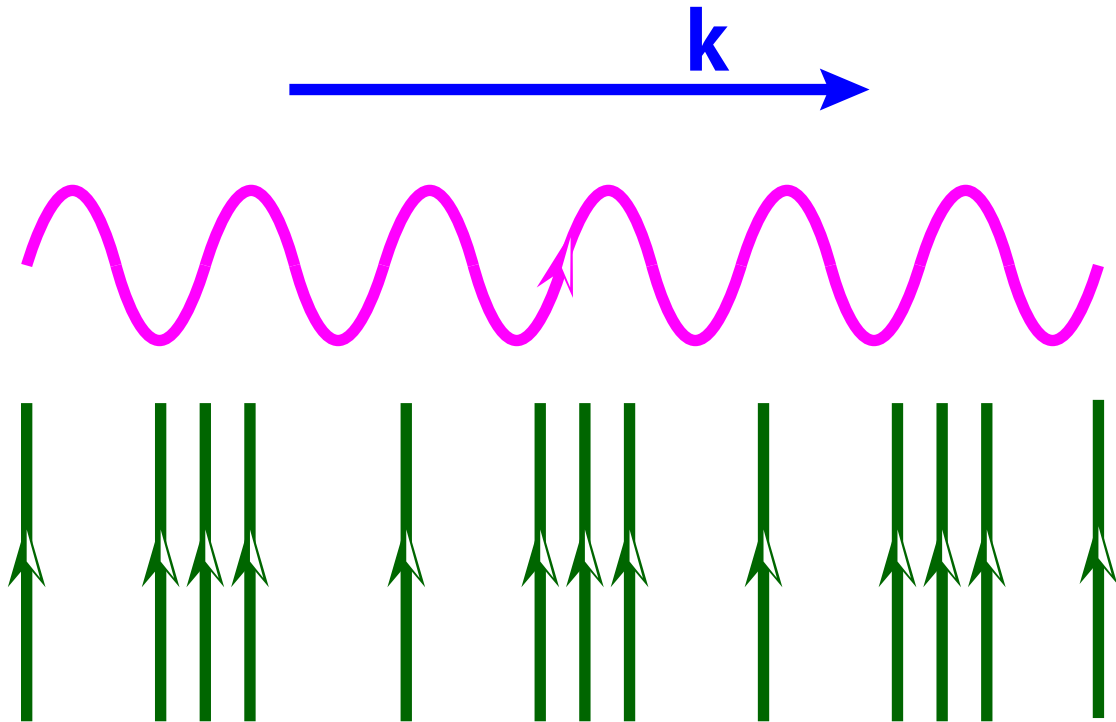


fig 1: 磁場中を伝わる波のイメージ。

となり、やはりアルヴェーン速度に一致する。磁場による波の様子は fig1 に示す通りである。

以上の議論から、(1). 磁場による波は独立に 2 種類存在し、(2). 磁気張力・磁気圧は Lorentz Force $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ から生まれるものだから、これらの波は磁場に対して斜め方向にも伝播しうる、ということがわかるだろう。ではもう少し数学的に厳密な議論に入る。(22) 式において、 $p_0 = g = \Omega = 0$ (圧力が無視できる、磁場が支配的で平衡状態になっているような系) とすると

$$\begin{aligned} \omega^2 \mathbf{v}_1 &= \frac{1}{4\pi\rho_0} [\mathbf{k} \times \{\mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)\}] \times \mathbf{B}_0 \quad \underbrace{\equiv}_{\hat{\mathbf{B}}_0 \equiv \mathbf{B}_0/B_0} [\mathbf{k} \times \{\mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{B}}_0)\}] \times \hat{\mathbf{B}}_0 v_A^2 \\ &= [\mathbf{k} \times \{(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \hat{\mathbf{B}}_0\}] \times \hat{\mathbf{B}}_0 v_A^2 = [(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \{(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \mathbf{k}\} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \{(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \hat{\mathbf{B}}_0 - \mathbf{k}\}] v_A^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\omega^2}{v_A^2} \mathbf{v}_1 &= (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)^2 \mathbf{v}_1 - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)(\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \hat{\mathbf{B}}_0 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} \\
&= (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)^2 \mathbf{v}_1 + \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)(\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)\} \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \hat{\mathbf{B}}_0
\end{aligned} \tag{32}$$

ここで $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ として、 $\hat{\mathbf{k}}$ と $\hat{\mathbf{B}}_0$ とのなす角を θ_B とすると

$$\frac{\omega^2}{v_A^2} \mathbf{v}_1 = k^2 \cos^2 \theta_B \mathbf{v}_1 + \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - k \cos \theta_B (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)\} \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) k \cos \theta_B \hat{\mathbf{B}}_0 \tag{33}$$

ここまでは式変形に徹してきたが、ここで磁気流体波の性質について一言ふれておこう。基礎方程式 (5) 式より $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ が常に成り立つので、磁場の摂動は必ず波の進行方向に対して垂直である。また (33) 式の両辺を $\hat{\mathbf{B}}_0$ との内積をとると

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{v_A^2} \mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0 &= k^2 \cos^2 \theta_B (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) + \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - k \cos \theta_B (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)\} k \cos \theta_B - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) k \cos \theta_B = 0 \\
\Rightarrow \mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0 &= 0
\end{aligned} \tag{34}$$

となり、(圧力が無視できる時) 速度ベクトルの摂動量は必ず背景磁場 \mathbf{B}_0 に対して垂直であることがわかる。これは Lorentz force $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ が流体に与える力が磁場に垂直なことから当然の結果と言える (ただし、この話しは線形解析の場合に限る、非線形の場合はもっと複雑な議論が必要である)。(34) 式と (33) 式の両辺に \mathbf{k} の内積をとったものより

$$(\omega^2 - k^2 v_A^2)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) = 0 \tag{35}$$

(i). Shear Alfvén Wave

(35) 式の解の一つとして $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ (すなわち $\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, 非圧縮) がある。(33) 式より

$$\frac{\omega^2}{v_A^2} \mathbf{v}_1 = k^2 \cos^2 \theta_B \mathbf{v}_1 \Rightarrow v_p = \frac{\omega}{k} = v_A \cos \theta_B \tag{36}$$

よって背景磁力線方向 ($\theta_B = 0$) では位相速度が最大の v_A となるが、背景磁力線に垂直な方向 ($\theta_B = \pi/2$) には波は進行しない。また背景磁場の方向 $\hat{\mathbf{B}}_0$ を z 軸にとると、 $k_z = k \cos \theta_B$ より

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = v_A \mathbf{e}_z \tag{37}$$

となり、背景磁場の方向にしかエネルギーを伝播しない。

ここでは $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ を仮定したが、ここでさらに $\rho_0, p_0 = \text{uniform}$ を仮定しよう。すなわち (8), (11) より、波動が伝播することによる密度・圧力変化はないものとする。

$$\begin{aligned}
(4) \Rightarrow -i\omega \mathbf{B}_1 &= i\mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{v}_1 - \underbrace{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)}_{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0} \mathbf{B}_0 = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{v}_1 \\
\Rightarrow \mathbf{v}_1 &= -\frac{\omega}{k B_0 \cos \theta_B} \mathbf{B}_1 \stackrel{(36)}{=} -\frac{v_A}{B_0} \mathbf{B}_1 = -\frac{\mathbf{B}_1}{\sqrt{4\pi\rho_0}}
\end{aligned} \tag{38}$$

より、この波の伝播において $\mathbf{B}_1 \parallel \mathbf{v}_1$ となることがわかる。さらに (34) 式より

$$\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \implies \mathbf{B}_0 \perp \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_0 \perp \mathbf{v}_1 \quad (39)$$

これより、波動として伝播していく摂動磁場 \mathbf{B}_1 は背景磁場 \mathbf{B}_0 と垂直であることがわかる。唐突だが、摂動による電流 \mathbf{j}_1 による Lorentz force について考えてみよう。

$$\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 \stackrel{\text{ベクトル解析}}{=} \frac{4\pi}{c} \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)\mathbf{B}_1 - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1)\mathbf{k}\} \quad (40)$$

第1項が磁気張力による項、第2項が磁気圧勾配による項であるが、(39)式より第2項は0である。よって shear Alfvén wave の復元力は磁気張力のみであることがわかる (ただし、非圧縮を仮定)。またこの波動における磁場のエネルギーと運動エネルギーとの比を考えてみると

$$\frac{\frac{B_1^2}{8\pi}}{\frac{1}{2}\rho_0 v_1^2} \stackrel{(38)}{=} \frac{B_1^2}{8\pi} \frac{2}{\rho_0} \frac{4\pi\rho_0}{B_1^2} = 1 \quad (41)$$

となることから、shear Alfvén wave は磁場エネルギーと運動エネルギーの等分配を内包していることがわかる。観測によると、磁場・Cosmic ray・乱流・ガスの thermal energy の4つが、星間空間では energy equipartition の状態にあるらしい (Spitzer の教科書参照)。

(ii). Torsional Alfvén Wave

普通の有限振幅波は時間とともにその形が崩れ、最終的には衝撃波となることが多い。しかし、有限振幅の Alfvén 波はそのままの形で伝播していくことができる。ここでは有限振幅の円偏光 Alfvén 波 (torsional Alfvén wave) がどのような方程式を満たすかを考察する。

外力・圧力・粘性等を無視して、(2)式を

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (42)$$

とする。最初、磁場は一様 $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ で流体は静止していたとする。ここに円偏光 Alfvén 波となるような有限の大きさの摂動を加える。

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + B_\perp(t, z) \mathbf{e}_+ \quad (43)$$

のように B_0 に垂直な方向に摂動 B_\perp が加わったとする。ここで \mathbf{e}_+ はヘリシティーが正の偏光ベクトルで

$$\mathbf{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \quad (44)$$

である (プラズマ業界ではヘリシティーが正のものを右廻りと呼ぶが、光の業界ではこれは左廻りと呼ばれている。定義に注意せよ)。

ideal MHD より流体は磁場に frozen されていると考えて、

$$\mathbf{v}(t, z) = \mathbf{v}_\perp = v_\perp(t, z) \mathbf{e}_+ \quad (45)$$

となる。

$$\begin{aligned}
(4), (43), (45) \implies \frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial t} &= \nabla \times \{v_\perp \mathbf{e}_+ \times (B_0 \mathbf{e}_z + B_\perp \mathbf{e}_+)\} = \nabla \times (v_\perp \mathbf{e}_+ \times B_0 \mathbf{e}_z) \stackrel{(44)}{=} \nabla \times \left\{ v_\perp B_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{e}_y + i\mathbf{e}_x) \right\} \\
&= \frac{B_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} iv_\perp(t, z) \\ -v_\perp(t, z) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{B_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_\perp}{\partial z} \\ i \frac{\partial v_\perp}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = B_0 \frac{\partial v_\perp}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) = B_0 \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial t} \quad (46)
\end{aligned}$$

(42) 式の各項を計算しよう。

$$(44), (45) \implies (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla) \mathbf{v}_\perp = v_\perp \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \{v_\perp(t, z) \mathbf{e}_+\} = 0 \quad (47)$$

$$(43), (44) \implies \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} B_\perp(t, z) \\ \frac{i}{\sqrt{2}} B_\perp(t, z) \\ B_0 \end{pmatrix} \implies \nabla B^2 = \nabla B_0^2 = 0 \quad (48)$$

$$(43), (44) \implies (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \left\{ B_\perp \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) + B_0 \frac{\partial}{\partial z} \right\} \{B_0 \mathbf{e}_z + B_\perp(t, z) \mathbf{e}_+\} = B_0 \frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial z} \quad (49)$$

これらを (42) 式に代入。

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\rho} B_0 \frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial z} \quad (50)$$

$$\therefore (46), (50) \implies \frac{\partial^2 \mathbf{B}_\perp}{\partial t^2} = B_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial t} = \frac{B_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_\perp}{\partial z^2} = v_A^2 \frac{\partial^2 \mathbf{B}_\perp}{\partial z^2} \quad (51)$$

これは波動方程式の形をしている。よって有限振幅の円偏波 Alfvén 波は位相速度 $v_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho}$ で進行し、その形を崩す (衝撃波になったり、振幅が減衰する) ことなく伝播していくことがわかる (円偏波 Alfvén wave のイメージを fig2 に図示した)。ただし、途中 $\rho = \text{uniform}$ を仮定した。

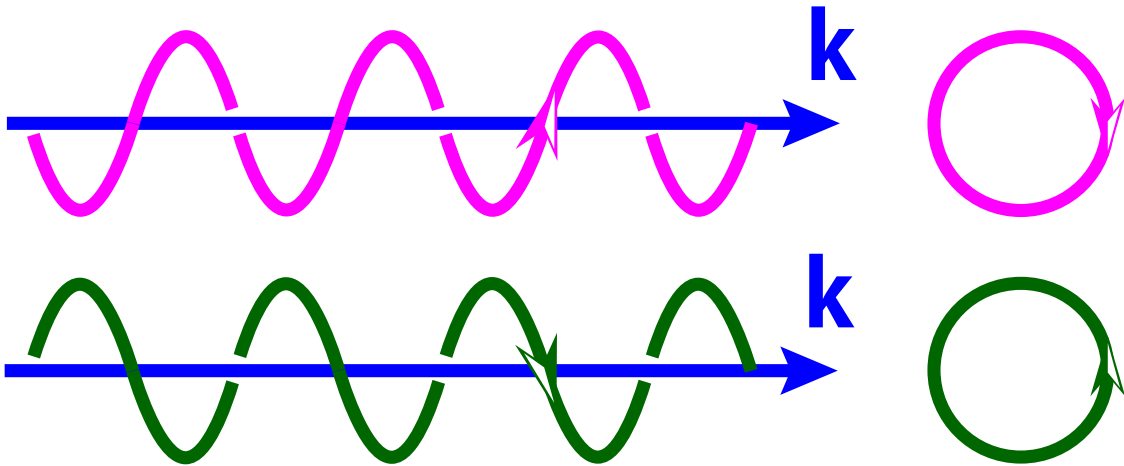


fig 2: 左回り (上) と右回り (下) の torisoidal Alfvén 波。

有限振幅でも Alfvén wave は形を崩すこと無く伝播すると記述したが、実際には波長 λ の単色 Alfvén wave は ohmic diffusion により $\tau \simeq \lambda^2/\eta$ で拡散していく。ほかの有限振幅波は波が鋭く突っ立っていき、長さのスケールが λ よりもとても小さく

なり、結果として早く減衰していくのでそれに比べれば、この波は長い時間、形をキープして伝播していくことができる。しかし話はそう単純ではなく、実は有限振幅波の Alfvén 波は非線形相互作用により Alfvén 波の持つエネルギーを音波のエネルギーへと変化させることができ、結局のところ素早く減衰してしまう、という現象が起こる。

(iii). Compressional Alfvén Wave

(35) のもう一つの解は

$$\omega = kv_A \tag{52}$$

これを compressional Alfvén wave と呼ぶ。こちらは位相速度・群速度ともに v_A で、等方的に伝播していく。(33) 式より \mathbf{v}_1 は $\hat{\mathbf{B}}_0, \mathbf{k}$ の張る面上にあり、(34) 式より $\mathbf{v}_1 \perp \hat{\mathbf{B}}_0$ であることがわかる。さらに

$$(4) \implies -i\omega \mathbf{B}_1 = i\mathbf{k} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)\mathbf{v}_1 - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{B}_0 \tag{53}$$

より \mathbf{B}_1 は $\mathbf{v}_1, \mathbf{B}_0$ の張る面上にあるが、(14) 式より

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \tag{54}$$

から $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_1$ であることがわかる。

Lorentz force(40) は fig?? のように \mathbf{k} と \mathbf{B}_0 のなす角度が θ_B だったことを思い出すと

$$\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c}(kB_0 \cos \theta_B \mathbf{B}_1 + B_0 B_1 \sin \theta_B \mathbf{k}) = \frac{4\pi}{c}kB_0 B_1(\cos \theta_B \hat{\mathbf{B}}_1 + \sin \theta_B \hat{\mathbf{k}}) \tag{55}$$

となり、これは \mathbf{v}_1 方向に一致する。そのため、compressional Alfvén wave は磁気張力と磁気圧の両方が復元力となって伝播する。 $\theta_B = \pi/2$ (\mathbf{B}_0 に対して垂直方向) のとき $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{k}$ となり、これは縦波である。 $\theta_B = 0$ (\mathbf{B}_0 と同じ方向) のときこれは shear Alfvén wave に一致し、compressional と呼ばれながら横波である。

(i), (iii) より背景磁場 \mathbf{B}_0 に対する波動の伝播方向によって位相速度が変化する様子をまとめることができる。これを Friedrichs diagram と呼び、fig3 のようにまとめることができる。

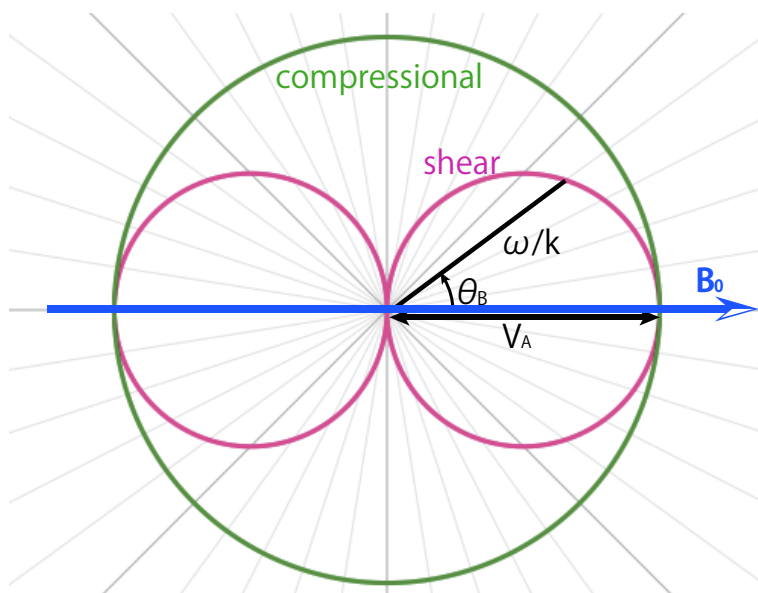


fig 3: Friedrichs diagram.

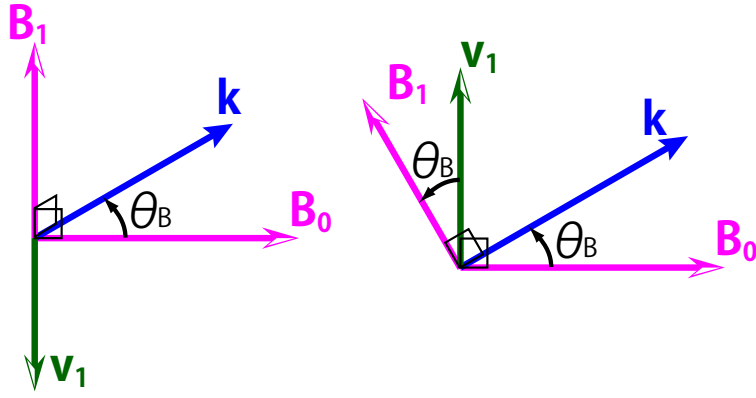


fig 4: left : shear Alfvén wave. right : compressional Alfvén wave.

また、(i), (iii) によって示された B_0, B_1, k, v_1 の相対関係は fig4 のように書ける。

internal gravity wave

ここでもまずは直感的議論から入ることにしよう。fig5 のようにある流体中の塊を考え、それを δz だけ持ち上げたとする。そのとき (i). 持ち上げているときは常に周囲と圧力平衡を保ちながら上昇する、(ii). 持ち上げる流体の塊は断熱的に密度変化する (すなわち周囲と熱のやり取りは行わない)、と仮定する。持ち上げた流体の外側の物理量に 0 の添字をつけて考えると

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g \quad (56)$$

のように重力と圧力勾配の釣り合いが成り立っている。高さ $z + \delta z$ における外側の物理量 $p_0 + \delta p_0, \rho_0 + \delta \rho_0$ より

$$p_0(z + \delta z) = p_0 + \delta p_0 = p_0 + \frac{dp_0}{dz} \delta z \stackrel{(56)}{=} p_0 - \rho_0 g \delta z \implies \delta p_0 = -\rho_0 g \delta z \quad (57)$$

$$\rho_0(z + \delta z) = \rho_0 + \frac{d\rho_0}{dz} \delta z = \rho_0 + \delta \rho_0 \implies \delta \rho_0 = \frac{d\rho_0}{dz} \delta z \quad (58)$$

添字無しの物理量を断熱的に持ち上げた流体中の物理量とすると、(i) の仮定より

$$\delta p = \delta p_0 = -\rho_0 g \delta z \quad (59)$$

初期状態は $p = p_0, \rho = \rho_0$ 。そこから断熱的に持ち上げたので、

$$\begin{aligned} p_0 = K \rho_0^\gamma &\implies \text{const} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{p_0 + \delta p}{(\rho_0 + \delta \rho)^\gamma} = \frac{p_0 + \delta p}{\rho_0^\gamma} \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0}\right)^{-\gamma} \simeq \frac{p_0 + \delta p}{\rho_0^\gamma} \left(1 - \frac{\gamma \delta \rho}{\rho_0}\right) \\ &\implies p_0 = (p_0 + \delta p) \left(1 - \frac{\gamma \delta \rho}{\rho_0}\right) \simeq p_0 - \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \delta \rho + \delta p \end{aligned}$$

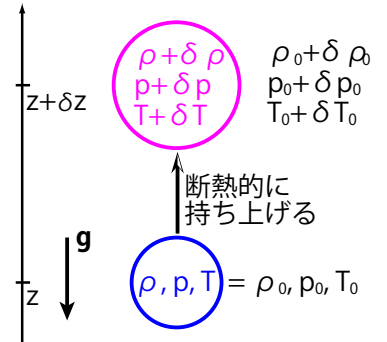


fig 5: 一様重力場中で流体要素を断熱的に δz 持ち上げる。

$$\underbrace{\implies}_{(59)} -\underbrace{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}_{=C_s^2} \delta\rho - \rho_0 g \delta z = 0 \implies \delta\rho = -\frac{\rho_0 g}{C_s^2} \delta z \quad (60)$$

よって、断熱的に持ち上げた流体の塊とその外側では密度が違ってくる。それにより流体の塊にはたらく浮力は

$$g(\delta\rho_0 - \delta\rho) = g \left(\frac{d\rho_0}{dz} + \frac{\rho_0 g}{C_s^2} \right) \delta z = -N^2 \rho_0 \delta z \quad \left(N^2 \equiv -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g}{C_s^2} \right) \right) \quad (61)$$

のように書ける。この N を Brunt-Vaisala frequency と呼ぶ。 N^2 をもう少し変形し、物理的な理解を深めてみよう。

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\rho_0}{\mu m_p} k_B T_0 \implies \frac{dp_0}{dz} = \frac{k_B}{\mu m_p} T_0 \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{\rho_0 k_B}{\mu m_p} \frac{dT_0}{dz} \underbrace{\implies}_{(56)} -1 = \frac{1}{g} \frac{k_B}{\mu m_p} \left(\frac{T_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{dT_0}{dz} \right) \\ &\implies \frac{1}{T_0} \left(-g \frac{\mu m_p}{k_B} - \frac{dT_0}{dz} \right) = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \therefore N^2 &= -g \left\{ -\frac{1}{T_0} \left(g \frac{\mu m_p}{k_B} + \frac{dT_0}{dz} \right) + \frac{g}{C_s^2} \right\} = \frac{g}{T_0} \left(g \frac{\mu m_p}{k_B} + \frac{dT_0}{dz} - \frac{g T_0}{C_s^2} \right) = \frac{g}{T_0} \left(g \frac{\rho_0 T_0}{p_0} + \frac{dT_0}{dz} - \frac{g T_0}{C_s^2} \right) \\ &= \frac{g}{T_0} \left\{ \frac{dT_0}{dz} - (\gamma - 1) \frac{g T_0}{C_s^2} \right\} \end{aligned} \quad (63)$$

ここで、断熱のとき

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\rho_0}{\mu m_p} k_B T_0 = K \rho_0^\gamma \implies T_0 = \frac{\mu m_p}{k_B} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\mu m_p}{k_B} p_0 \frac{K^{1/\gamma}}{p_0^{1/\gamma}} = \frac{\mu m_p}{k_B} K^{1/\gamma} p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \implies \left(\frac{dT_0}{dz} \right)_{\text{ad}} = \frac{\mu m_p}{k_B} K^{1/\gamma} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp_0}{dz} p_0^{-1/\gamma} \\ &\implies \left(\frac{dT_0}{dz} \right)_{\text{ad}} = \frac{\mu m_p}{k_B} \frac{1}{\rho_0} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp_0}{dz} \underbrace{=}_{(56)} -\frac{\mu m_p}{k_B} \frac{\gamma-1}{\gamma} g \end{aligned} \quad (64)$$

さらに

$$C_s^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \gamma \frac{k_B}{\mu m_p} T_0 \quad (65)$$

より

$$\left(\frac{dT_0}{dz} \right)_{\text{ad}} = -(\gamma - 1) \frac{g T_0}{C_s^2} \quad (66)$$

$$\therefore N^2 = \frac{g}{T_0} \left\{ \frac{dT_0}{dz} - \left(\frac{dT_0}{dz} \right)_{\text{ad}} \right\} \quad (67)$$

と書き直すことができる。流体にはたらく浮力 $g(\delta\rho_0 - \delta\rho) = -N^2 \rho_0 \delta z$ を計算していたので、流体要素に対して運動方程式を立てることができる。

$$\rho_0 \frac{D\delta z}{Dt} = -N^2 \rho_0 \delta z \quad (68)$$

これは $N^2 > 0$ のとき、 $\omega = N$ の単振動を表す式である。逆に $N^2 < 0$ のとき、すなわち

$$-\frac{dT_0}{dz} > -\left(\frac{dT_0}{dz}\right)_{\text{ad}} \quad (69)$$

のように断熱状態のからなる系があったとして、その温度勾配よりも温度変化が激しいとき、不安定となることがわかる。これはエントロピーの議論から直感的に考えることができる。以下の議論では簡単のため $p = C\rho^\Gamma$ ($\Gamma \geq 1$) で系の状態が記述され、考えている系は恒星のような z とともに温度 T が減少していくような構造を持つ系であるとしよう。ここで $\Gamma = 1$ は等温構造、 $\Gamma = \gamma = \frac{5}{3}$ は理想気体・断熱構造にそれぞれ対応している。 ρ, p を温度で T すると

$$p = \frac{\rho}{\mu m_p} k_B T = C\rho^\Gamma \implies \rho = C_1 T^{\frac{1}{\Gamma-1}}, \quad p = C_2 T^{\frac{\Gamma}{\Gamma-1}} \quad (70)$$

エントロピーは

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} \propto \ln T^{\frac{\Gamma-\gamma}{\Gamma-1}} \propto \frac{\Gamma-\gamma}{\Gamma-1} \ln T \quad (71)$$

と書ける。 z とともに T が減少するような系を考えているので、 $\ln T$ も同様に単調減少する。よってエントロピーの増減は $\Gamma - \gamma$ に依存する。fig6, 7のように横軸に z 、縦軸に s (エントロピー) を描いて議論すれば明白である。断熱な系はエントロピー一定より、 z に依存しない (横一直線)。断熱な系よりも温度勾配が緩やかな系は $1 < \Gamma < \gamma$ であり、 z とともにエントロピーが上昇するような系である。この場合に断熱的に $+z$ 方向に動かしたとき、周囲よりもエントロピーが低い (温度が低いことに対応) ので収縮して重くなり、重力で元の位置に戻される。 $-z$ 方向に動かしたときも、周囲よりもエントロピーが高い (温度が高いことに対応) ため膨張して軽くなり、浮力で元の位置に戻される。よって安定に振動を続ける。断熱な系よりも温度勾配がきつい系は $\Gamma > \gamma$ であり、 z とともにエントロピーが減少するような系である。この場合に断熱的に $+z$ 方向に流体要素を動かすと、周囲よりもエントロピーが高い (温度が高いことに対応) ため、さらに膨張して軽くなるため、余計に浮力がはたらき、上昇を続けてしまう。 $-z$ 方向に動かすと、周囲よりもエントロピーが低い (温度が低いことに対応) ため、より収縮して重くなり、重力によって下降を続けることになる。よってこれは不安定である。(69) 式を Schwarzschild criterion と呼ぶ。

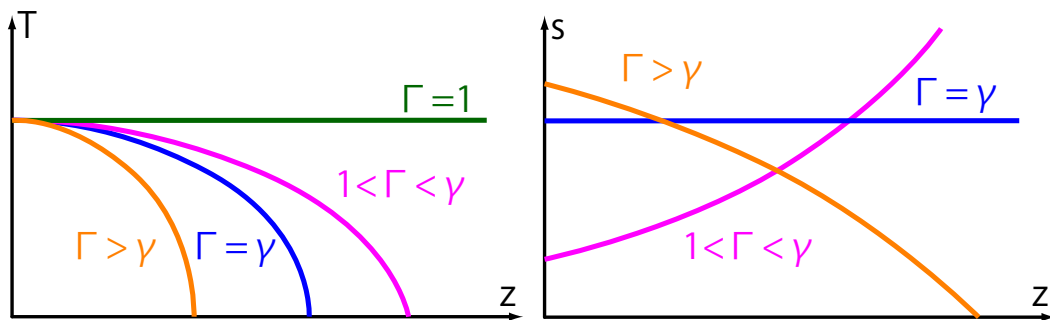


fig 6: left : 縦軸 T . right : 縦軸 s .

では定量的にこの波動を求めてみよう。簡単のため (22) 式において $B_0 = \Omega = 0$ とする。両辺 \mathbf{k} との内積をとったもの

$$(22) \implies \omega^2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{k}) = C_s^2 k^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) + i(\gamma - 1)g(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)k_z + igk^2 v_{1z} \implies igk^2 v_{1z} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \{ \omega^2 - C_s^2 k^2 - i(\gamma - 1)gk_z \} \quad (72)$$

そして両辺 \mathbf{e}_z との内積をとったもの

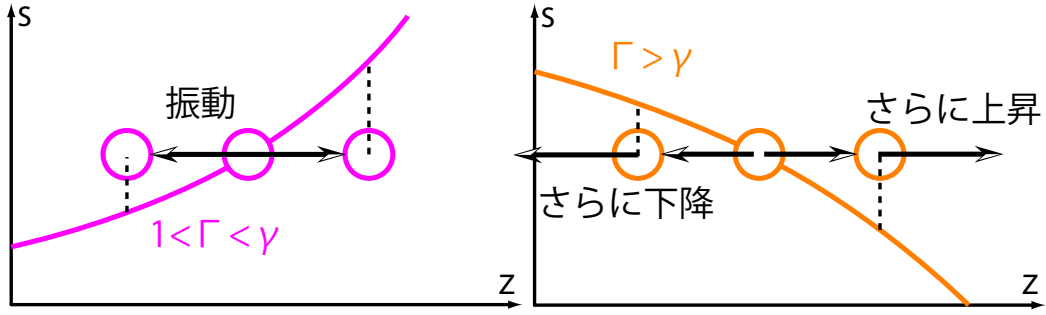


fig 7: left : $1 < \Gamma < \gamma$ (安定に振動). right : $\Gamma > \gamma$ (対流不安定).

$$(22) \implies \omega^2 v_{1z} = C_s^2 k_z (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) + i(\gamma - 1)g(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) + igk_z v_{1z} \implies (\omega^2 - igk_z)v_{1z} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)\{C_s^2 k_z + i(\gamma - 1)g\} \quad (73)$$

この2式より $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1)/v_{1z}$ を消去。

$$igk^2\{C_s^2 k_z + i(\gamma - 1)g\} = (\omega^2 - igk_z)\{\omega^2 - C_s^2 k^2 - i(\gamma - 1)gk_z\} \quad (74)$$

ここまで圧縮による効果の項 (すなわち音波の項) を残して変形してきた。今は重力で伝播していく波、すなわち Brunt-Vaisala frequency 程度の周波数の波を導こうとしており、これは音波に比べて十分小さい周波数の波である。よって調べるのは波長が scale-height よりも十分短いものに限るとする、すなわち local analysis

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \ll \frac{C_s^2}{g} \simeq \Lambda \implies \omega \simeq \frac{g}{C_s} \ll kC_s \quad (75)$$

を仮定する。両辺を $k^2 C_s^2$ で割ると

$$\begin{aligned} ig \left\{ k_z + i(\gamma - 1) \frac{g}{C_s^2} \right\} &= (\omega^2 - igk_z) \left\{ \frac{\omega^2}{k^2 C_s^2} - 1 - i(\gamma - 1) \frac{g}{C_s^2} \frac{k_z}{k^2} \right\} \simeq -(\omega^2 - igk_z) \left\{ 1 + i(\gamma - 1) \frac{g}{C_s^2} \frac{k_z}{k^2} \right\} \\ \implies igk_z - (\gamma - 1) \frac{g^2}{C_s^2} &\simeq -\omega^2 \left\{ 1 + i(\gamma - 1) \frac{g}{C_s^2} \frac{k_z}{k^2} \right\} + igk_z - (\gamma - 1) \frac{g^2}{C_s^2} \frac{k_z^2}{k^2} \implies \omega^2 = (\gamma - 1) \frac{g^2}{C_s^2} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) \end{aligned} \quad (76)$$

$k_z = k \cos \theta_g$ において

$$\omega^2 = \underbrace{(\gamma - 1) \frac{g^2}{C_s^2}}_{\equiv N} \sin^2 \theta_g \implies \therefore \omega = N \sin \theta_g \quad (77)$$

この分散関係式を満たす波動を内部重力波と呼ぶ。分散関係式を見てわかる通り、 $\theta_g = 0$ or π のとき、すなわち重力に平行な方向には内部重力波は伝播しない。鉛直下向きの重力に対して、上向きに θ_g 方向に内部重力波が伝播していくとき、その伝播の仕方は角度 θ_g の円錐状に伝わっていく。そのときの位相速度は

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{N}{k} \sin \theta_g \quad (78)$$

であり、群速度は

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_g &= \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = N \frac{\partial}{\partial k_i} \left(1 - \frac{k_z^2}{k_j k_j}\right)^{1/2} = N \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_z^2}{k_j k_j}\right)^{-1/2} \left(-\frac{2k_z \delta_{iz} k_j k_j - k_z^2 2k_j \delta_{ij}}{(k_j k_j)^2}\right) \\
&= \frac{N}{2} \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right)^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{2k_x k_z^2}{k^4} \\ \frac{2k_y k_z^2}{k^4} \\ -2\frac{k_x^2 + k_y^2}{k^4} k_z \end{pmatrix} = \frac{N}{\sin \theta_g} \begin{pmatrix} \frac{k_x k_z^2}{k^4} \\ \frac{k_y k_z^2}{k^4} \\ -\frac{\sin^2 \theta_g}{k^2} k_z \end{pmatrix} \quad (79)
\end{aligned}$$

であることがわかる。 z 成分だけ取り出してきても $v_{gz} = -\frac{\omega k_z}{k^2}$ となる。波としては上向きに伝播していても関わらず、エネルギーの流れは反対に下向きに伝播していていることを示している。ちなみに

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_g = 0 \quad (80)$$

であることから、内部重力波の伝播コーンに垂直な方向にエネルギーは流れていく。

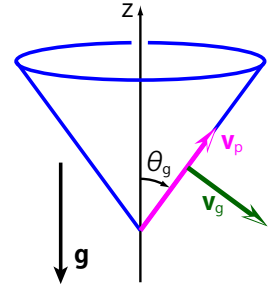


fig 8: 内部重力波の位相速度と群速度の方向。

inertial wave

線形化された運動方程式 (9) において、回転によって生じるコリオリ力の項のみを考えるとしよう。

$$(9) \implies \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_1 \quad (81)$$

さらに角速度ベクトルは z 成分しか持たないと簡単化して、 $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ とすると

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial t} = 2\Omega v_{1y}, \quad \frac{\partial v_{1y}}{\partial t} = -2\Omega v_{1x} \quad (82)$$

となり、この解は即座

$$v_{1x} = A \cos(kz - 2\Omega t), \quad v_{1y} = A \sin(kz - 2\Omega t) \quad (83)$$

のような波動解が求まる。これを慣性波 (inertial wave) と呼ぶ。この波動を生み出している復元力はコリオリ力であり、コリオリ力は流体要素に xy 平面内を円運動させるような加速度を生み出す。結果として、軸と平行方向に角速度 2Ω の波動が伝播していく。

もう少し定量的な議論をしよう。簡単のため (22) 式において重力と磁場を無視 $g = B_0 = 0$ し、さらに非圧縮 (横波、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$) を仮定すると

$$\omega^2 \mathbf{v}_1 = C_s^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - 2i\omega \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_1 = -2i\omega \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_1 \quad (84)$$

両辺 \mathbf{k} との外積をとり式変形を行う。

$$\omega^2 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_1 = -2i\omega \mathbf{k} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_1) = -2i\omega \underbrace{\{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v}_1\}}_{=0(\text{非圧縮})} = 2i\omega (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v}_1 \quad (85)$$

この両辺の大きさをとることでベクトル量を除去し、 ω の式にしよう。 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ より $|\mathbf{k} \times \mathbf{v}_1| = kv_1$ と簡単に書くことができる。

$$\{\omega^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{v}_1)\} \{\omega^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{v}_1)\}^* = \{2i\omega (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v}_1\} \{2i\omega (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v}_1\}^* \implies \omega^4 k^2 v_1^2 = 4\omega^2 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2 v_1^2 \implies \omega = \pm \frac{2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})}{k} \quad (86)$$

伝播方向 \mathbf{k} と回転軸 (角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$) とのなす角を θ_Ω とおくと

$$(86) \implies \omega = \pm 2\Omega \cos \theta_\Omega \implies v_p = \pm \frac{2\Omega \cos \theta_\Omega}{k} \quad (87)$$

\mathbf{v}_1 は波動の伝播に従って円運動をする。よって慣性波は円偏波である。またこの波動の渦度ベクトルと \mathbf{v}_1 との内積を計算すると

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 \cdot (i\mathbf{k} \times \mathbf{v}_1) \underbrace{=}_{(85)} -\mathbf{v}_1 \cdot \frac{2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})}{\omega} \mathbf{v}_1 \underbrace{=}_{(86)} \mp kv_1^2 \quad (88)$$

のように、渦度ベクトルは \mathbf{v}_1 と平行 or 反平行であることがわかる。これは helicity として知られる量である。群速度を計算してみよう。

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \pm 2 \frac{\partial}{\partial k_i} \frac{k_j \Omega_j}{(k_m k_m)^{1/2}} = \pm 2 \frac{\delta_{ij} \Omega_j (k_m k_m)^{1/2} - \frac{1}{2} (k_m k_m)^{-1/2} 2k_m \delta_{im} k_j \Omega_j}{k_m k_m} = \pm 2 \frac{k^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k}}{k^3} = \pm \frac{\mathbf{k} \times (2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k})}{k^3} \quad (89)$$

その大きさは

$$v_g = \frac{k \cdot 2\Omega k \sin \theta_\Omega}{k^3} = \frac{2\Omega \sin \theta_\Omega}{k} \quad (90)$$

$$\therefore (87), (90) \implies (v_g^2 + v_p^2)^{1/2} = \frac{2\Omega}{k} \quad (91)$$

このように整理すると θ_Ω に依存しない形が出てくる。これは $\mathbf{v}_g \perp \mathbf{v}_p$ を意味しており、内部重力波と同様にエネルギーは波数ベクトルとは垂直な方向に移動していく。

(22) 式において、今度は $g = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ 、すなわちコリオリ力と磁場の効果を考慮したときの分散関係式を求めてみよう。

(33) 式より

$$\begin{aligned} \omega^2 \mathbf{v}_1 &= -2i\omega \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_1 + v_A^2 [(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \{(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \mathbf{k}\}] \\ \implies \underbrace{\omega^2 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_1}_{\text{両辺に } \mathbf{k} \times} &= -2i\omega \mathbf{k} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_1) + \underbrace{v_A^2 (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)^2}_{\equiv \omega_A^2} \mathbf{k} \times \mathbf{v}_1 = -2i\omega \underbrace{\{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v}_1\}}_{=0} + \omega_A^2 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_1 \\ \implies (\omega^2 - \omega_A^2) \mathbf{k} \times \mathbf{v}_1 &= 2i\omega (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v}_1 \implies (\omega^2 - \omega_A^2) kv_1 = \pm 2\omega (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) v_1 \implies \omega^2 \mp \omega_I \omega - \omega_A^2 = 0 \quad (92) \\ &\quad \text{大きさをとる} \end{aligned}$$

ここで $\omega_I = 2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})/k$ である。

$\mathbf{k}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{B}_0$ がほぼ平行なとき

$$\frac{\omega_A}{\omega_I} \simeq \frac{v_A k}{\frac{2k\Omega}{k}} = \frac{kv_A}{2\Omega} \quad (93)$$

が成り立つ。ここで太陽の場合、 $\omega_A/\omega_I \gg 1$ (磁場が dominant) より (92) の解は

$$\omega^2 = \omega_A^2 \left(1 \pm \frac{\omega_I}{\omega_A} \frac{\omega}{\omega_A}\right) \underset{\omega_I/\omega_A \ll 1}{\simeq} \omega_A^2 \left(1 \pm \frac{\omega_I}{\omega_A} \frac{\omega_A}{\omega_A}\right) = \omega_A^2 \left(1 \pm \frac{\omega_I}{\omega_A}\right) \quad (94)$$

と書ける。これはコリオリ力によって Alfvén 波のモードがわずかではあるが 2 つに分裂したことを意味している。逆に銀河円盤のように、 $\omega_A/\omega_I \ll 1$ (回転が dominant) のとき

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\pm\omega_I \pm \sqrt{\omega_I^2 + 4\omega_A^2}}{2} = \frac{\pm\omega_I \pm \omega_I \sqrt{1 + 4\frac{\omega_A^2}{\omega_I^2}}}{2} \simeq \frac{\omega_I}{2} \left\{ \pm 1 \pm \left(1 + 2\frac{\omega_A^2}{\omega_I^2}\right) \right\} = \omega_I + \frac{\omega_A^2}{\omega_I}, \frac{\omega_A^2}{\omega_I} \\ &\simeq \omega_I, \frac{\omega_A^2}{\omega_I} \end{aligned} \quad (95)$$

最初の解は普通の inertial wave の解、2 つめの解は hydromagnetic inertial wave(磁気流体慣性波) と呼ばれ、普通の Alfvén 波よりも伝播速度はかなり遅い。

magnetoacoustic waves

(22) 式を重力と回転を無視 ($g = \Omega = 0$) して、 $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0 = k \cos \theta_B$ であること用いて整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v_A^2} \mathbf{v}_1 &= \frac{C_s^2}{v_A^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{k} + \underbrace{k^2 \cos^2 \theta_B \mathbf{v}_1 + \left\{ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - k \cos \theta_B (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \right\} \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) k \cos \theta_B \hat{\mathbf{B}}_0}_{(33) \text{ 式より}} \\ &= k^2 \cos^2 \theta_B \mathbf{v}_1 + \left\{ \left(1 + \frac{C_s^2}{v_A^2}\right) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - k \cos \theta_B (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \right\} \mathbf{k} - k \cos \theta_B (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \hat{\mathbf{B}}_0 \end{aligned} \quad (96)$$

両辺それぞれ \mathbf{k} との内積、 $\hat{\mathbf{B}}_0$ との内積をとった式を立てる。

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v_A^2} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{k} &= k^2 \cos^2 \theta_B \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{k} + \left\{ \left(1 + \frac{C_s^2}{v_A^2}\right) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - k \cos \theta_B (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \right\} k^2 - k \cos \theta_B (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \\ &= \left\{ k^2 \cos^2 \theta_B + k^2 \left(1 + \frac{C_s^2}{v_A^2}\right) - k^2 \cos^2 \theta_B \right\} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - k^3 \cos \theta_B (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \\ &= k^2 \left(1 + \frac{C_s^2}{v_A^2}\right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 - k^3 \cos \theta_B (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \implies \left\{ \frac{\omega^2}{v_A^2} - k^2 \left(1 + \frac{C_s^2}{v_A^2}\right) \right\} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) = k^3 \cos \theta_B \mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0 \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v_A^2} \mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0 &= k^2 \cos^2 \theta_B \mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0 + \left\{ \left(1 + \frac{C_s^2}{v_A^2}\right) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - k \cos \theta_B (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \right\} \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0 - k \cos \theta_B (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \\ &= \left(1 + \frac{C_s^2}{v_A^2}\right) k \cos \theta_B \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 - k \cos \theta_B \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{C_s^2}{v_A^2} k \cos \theta_B \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 \end{aligned} \quad (98)$$

二つの式より $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0$ を消去して

$$\left\{ \frac{\omega^2}{v_A^2} - k^2 \left(1 + \frac{C_s^2}{v_A^2} \right) \right\} \frac{v_A^2}{C_s^2 k \cos \theta_B} = k^3 \cos \theta_B \frac{v_A^2}{\omega^2} \implies \omega^4 - k^2(v_A^2 + C_s^2)\omega^2 - k^4 C_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B = 0 \quad (99)$$

$$\therefore \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{(v_A^2 + C_s^2) \pm \sqrt{(v_A^2 + C_s^2)^2 - 4C_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B}}{2} \quad (100)$$

となり、分散関係式を得る。+ 符号の位相速度の大きい波を fast-mode, - 符号の位相速度の小さい波を slow-mode と呼ぶ。fast, slow-mode における位相速度の背景磁場に対する角度依存性は fig9~11 のように描くことができる。

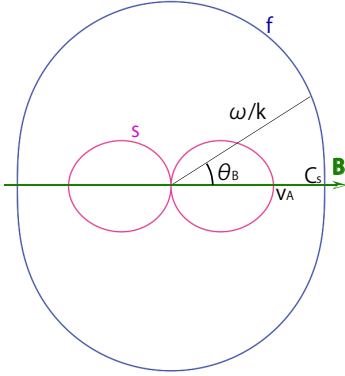


fig 9: $C_s > v_A$

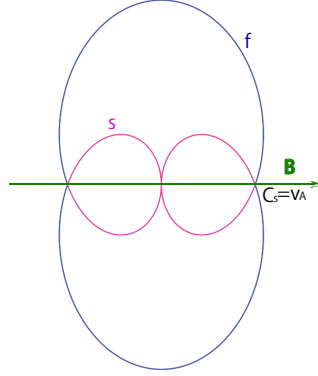


fig 10: $C_s = v_A$

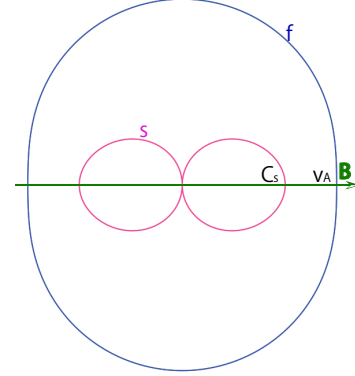


fig 11: $C_s < v_A$

しかし、これだけでは実際に流体がどのような振る舞いをしているのかを把握することはできない。よって固有値・固有ベクトルの方法を用いて、この分散関係式とその固有ベクトルを求める解放を挙げておこう。

$$\begin{aligned} (96) \implies \omega^2 \mathbf{v}_1 &= k^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B \mathbf{v}_1 + \{(v_A^2 + C_s^2)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) - k v_A^2 \cos \theta_B (\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)\} \mathbf{k} - k v_A^2 \cos \theta_B (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \hat{\mathbf{B}}_0 \\ \implies (\omega^2 - k^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B) \mathbf{v}_1 &= k \{(v_A^2 + C_s^2)(v_{1x} \sin \theta_B + v_{1z} \cos \theta_B) - v_A^2 \cos \theta_B v_{1z}\} \mathbf{k} \\ &\quad - k^2 v_A^2 \cos \theta_B (v_{1x} \sin \theta_B + v_{1z} \cos \theta_B) \hat{\mathbf{B}}_0 \\ \implies (\omega^2 - k^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B) \mathbf{v}_1 &= k^2 \{(v_A^2 + C_s^2) v_{1x} \sin \theta_B + C_s^2 \cos \theta_B v_{1z}\} \hat{\mathbf{k}} - k^2 v_A^2 \cos \theta_B (v_{1x} \sin \theta_B + v_{1z} \cos \theta_B) \hat{\mathbf{B}}_0 \\ \implies (\omega^2 - k^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B) \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} k^2 \{(v_A^2 + C_s^2) v_{1x} \sin \theta_B + C_s^2 \cos \theta_B v_{1z}\} \sin \theta_B \\ 0 \\ k^2 \{(v_A^2 + C_s^2) v_{1x} \sin \theta_B + C_s^2 \cos \theta_B v_{1z}\} \cos \theta_B - k^2 v_A^2 \cos \theta_B (v_{1x} \sin \theta_B + v_{1z} \cos \theta_B) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k^2 (v_A^2 + C_s^2) \sin^2 \theta_B v_{1x} + k^2 C_s^2 \sin \theta_B \cos \theta_B v_{1z} \\ 0 \\ k^2 C_s^2 \sin \theta_B \cos \theta_B v_{1x} + k^2 (C_s^2 - v_A^2) \cos^2 \theta_B v_{1z} \end{pmatrix} \\ \implies \begin{pmatrix} (k^2 v_A^2 + k^2 C_s^2 \sin^2 \theta_B - \omega^2) v_{1x} + k^2 C_s^2 \sin \theta_B \cos \theta_B v_{1z} \\ (k^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B - \omega^2) v_{1y} \\ k^2 C_s^2 \sin \theta_B \cos \theta_B v_{1x} + (k^2 C_s^2 \cos^2 \theta_B - \omega^2) v_{1z} \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\ \implies \begin{pmatrix} k^2 v_A^2 + k^2 C_s^2 \sin^2 \theta_B - \omega^2 & 0 & k^2 C_s^2 \sin \theta_B \cos \theta_B \\ 0 & k^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B - \omega^2 & 0 \\ k^2 C_s^2 \sin \theta_B \cos \theta_B & 0 & k^2 C_s^2 \cos^2 \theta_B - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (101)$$

この式より、速度の摂動は \mathbf{k}, \mathbf{B}_0 の両方に垂直な方向の変動 v_{1y} の横波と、 \mathbf{k}, \mathbf{B}_0 の張る面内での変動 (v_{1x}, v_{1z}) とに分かれる。 y 方向の速度の摂動式からは即座に

$$(k^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B - \omega^2) v_{1y} = 0 \implies \omega = k v_A \cos \theta_B \quad (102)$$

の shear Alfvén wave の分散関係を得る。 y 方向とは独立に

$$\begin{pmatrix} k^2 v_A^2 + k^2 C_s^2 \sin^2 \theta_B - \omega^2 & k^2 C_s^2 \sin \theta_B \cos \theta_B \\ k^2 C_s^2 \sin \theta_B \cos \theta_B & k^2 C_s^2 \cos^2 \theta_B - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1z} \end{pmatrix} = 0 \quad (103)$$

と式を書き直す。任意の (v_{1x}, v_{1z}) でこの式が恒等的に成立するためには係数行列の行列式が 0 になればよい。

$$\begin{vmatrix} k^2 v_A^2 + k^2 C_s^2 \sin^2 \theta_B - \omega^2 & k^2 C_s^2 \sin \theta_B \cos \theta_B \\ k^2 C_s^2 \sin \theta_B \cos \theta_B & k^2 C_s^2 \cos^2 \theta_B - \omega^2 \end{vmatrix} = (\omega^2 - k^2 v_A^2 - k^2 C_s^2 \sin^2 \theta_B)(\omega^2 - k^2 C_s^2 \cos^2 \theta_B) - k^4 C_s^4 \sin^2 \theta_B \cos^2 \theta_B \\ = \omega^4 + \{-k^2 v_A^2 - k^2 C_s^2 (\cos^2 \theta_B + \sin^2 \theta_B)\} \omega^2 + k^4 v_A^2 C_s^2 \cos^2 \theta_B = \omega^4 - k^2 (v_A^2 + C_s^2) \omega^2 + k^4 v_A^2 C_s^2 \cos^2 \theta_B = 0 \quad (104)$$

となり、分散関係式

$$\omega^2 = \frac{1}{2} k^2 \left\{ v_A^2 + C_s^2 \pm \sqrt{(v_A^2 + C_s^2)^2 - 4 C_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B} \right\} \quad (105)$$

を得る。一般の場合に (103) 式の固有ベクトルを求めるのは難しいので、ある極限を考えて求めることにしよう。

(i). $C_s^2 \gg v_A^2$ のとき (ガス圧優勢のとき)、 $\alpha \equiv v_A^2 / C_s^2$ とおくと

$$(105) \implies \omega^2 = \frac{1}{2} k^2 C_s^2 \left\{ \alpha + 1 \pm \sqrt{(\alpha + 1)^2 - 4\alpha \cos^2 \theta_B} \right\} \simeq \frac{1}{2} k^2 C_s^2 \left\{ \alpha + 1 \pm \sqrt{1 + 2\alpha - 4\alpha \cos^2 \theta_B} \right\} \\ \underset{\text{Taylor 展開}}{\simeq} \frac{1}{2} k^2 C_s^2 [\alpha + 1 \pm \{1 + (1 - 2 \cos^2 \theta_B) \alpha\}] \quad (106)$$

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} k^2 C_s^2 \{\alpha + 1 + 1 + (1 - 2 \cos^2 \theta_B) \alpha\} = k^2 C_s^2 \{1 + (1 - \cos^2 \theta_B) \alpha\} = k^2 C_s^2 (1 + \alpha \sin^2 \theta_B) \quad (107)$$

のとき

$$(103) \quad \begin{matrix} \implies \\ \text{両辺 } k^2 C_s^2 \text{ で割る} \end{matrix} \begin{pmatrix} \alpha + \sin^2 \theta_B - \frac{\omega^2}{k^2 C_s^2} & \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \cos \theta_B & \cos^2 \theta_B - \frac{\omega^2}{k^2 C_s^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1z} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \alpha + \sin^2 \theta_B - 1 - \alpha \sin^2 \theta_B & \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \cos \theta_B & \cos^2 \theta_B - 1 - \alpha \sin^2 \theta_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1z} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -(1 - \alpha) \cos^2 \theta_B & \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \cos \theta_B & -(1 + \alpha) \sin^2 \theta_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1z} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (108)$$

$$\therefore \frac{v_{1x}}{v_{1z}} = (1 + \alpha) \tan \theta_B \implies \mathbf{v}_1 = v_{10}((1 + \alpha) \sin \theta_B, \cos \theta_B) \quad (109)$$

より

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{k} = v_{10}k(1 + \alpha \sin \theta_B) > 0 \quad (110)$$

よってこの $C_s^2 \gg v_A^2$ の極限においては、fast-mode は縦波的であることがわかる。

$$\omega_-^2 = \frac{1}{2}k^2 C_s^2 \{\alpha + 1 - 1 - (1 - 2 \cos^2 \theta_B)\alpha\} = k^2 C_s^2 \alpha \cos^2 \theta_B \quad (111)$$

のとき

$$(103) \quad \begin{aligned} & \begin{array}{c} \implies \\ \text{両辺 } k^2 C_s^2 \text{ で割る} \end{array} \begin{pmatrix} \alpha + \sin^2 \theta_B - \alpha \cos^2 \theta_B & \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \cos \theta_B & \cos^2 \theta_B - \alpha \cos^2 \theta_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1z} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} (1 + \alpha) \sin^2 \theta_B & \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \cos \theta_B & (1 - \alpha) \cos^2 \theta_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1z} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (112)$$

$$\therefore \frac{v_{1x}}{v_{1z}} = -(1 - \alpha) \cot \theta_B \implies \mathbf{v}_1 = v_{10}(-(1 - \alpha) \cos \theta_B, \sin \theta_B) \quad (113)$$

より

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{k} = v_{10}k\alpha \sin \theta_B \cos \theta_B \ll 1 \quad (\alpha \ll 1) \quad (114)$$

よってこの $C_s^2 \gg v_A^2$ の極限においては、slow-mode はほぼ横波的であることがわかる。

(ii). $C_s = v_A$ のとき (ガス圧と磁気圧の大きさが同程度のとき)

$$(105) \implies \omega^2 = \frac{1}{2}k^2 v_A^2 (2 \pm \sqrt{4 - 4 \cos^2 \theta_B}) = k^2 v_A^2 (1 \pm \sin \theta_B) \quad (115)$$

$$\omega_+^2 = k^2 v_A^2 (1 + \sin \theta_B) \quad (116)$$

のとき

$$(103) \quad \begin{aligned} & \begin{array}{c} \implies \\ \text{両辺 } k^2 v_A^2 \text{ で割る} \end{array} \begin{pmatrix} 1 + \sin^2 \theta_B - (1 + \sin \theta_B) & \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \cos \theta_B & \cos^2 \theta_B - (1 + \sin \theta_B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1z} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta_B - \sin \theta_B & \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \cos \theta_B & -\sin^2 \theta_B - \sin \theta_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1z} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (117)$$

$$\therefore \frac{v_{1x}}{v_{1z}} = \frac{\cos \theta_B}{1 - \sin \theta_B} = \frac{1 + \sin \theta_B}{\cos \theta_B} \quad (118)$$

$$\omega_-^2 = k^2 v_A^2 (1 - \sin \theta_B) \quad (119)$$

のとき

$$(103) \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \text{両辺 } k^2 v_A^2 \text{ で割る} \end{array} \left(\begin{array}{cc} 1 + \sin^2 \theta_B - (1 - \sin \theta_B) & \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \cos \theta_B & \cos^2 \theta_B - (1 - \sin \theta_B) \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1z} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta_B + \sin \theta_B & \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \cos \theta_B & -\sin^2 \theta_B + \sin \theta_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1z} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (120)$$

$$\therefore \frac{v_{1x}}{v_{1z}} = -\frac{\cos \theta_B}{1 + \sin \theta_B} = -\frac{1 - \sin \theta_B}{\cos \theta_B} \quad (121)$$

この場合は v_{1x}/v_{1z} をどれをとするかによって $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1$ の結果が変化する。よって fast, slow-mode とともに縦波とも横波とも判別しがたい。よって $\theta_B \ll 1, \theta_B \rightarrow \pi/2$ の2つの極限の場合についてのみ考えてみよう。

(a). $\theta_B \ll 1$ のとき

$$\begin{cases} \text{fast-mode} : \mathbf{v}_{1f} \simeq v_{10}(1 + \theta_B, 1) \\ \text{slow-mode} : \mathbf{v}_{1s} \simeq v_{10}(-1 + \theta_B, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{1f} = v_{10}k(\theta_B + \theta_B^2 + 1) \simeq v_{10}k(1 + \theta_B) \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{1s} = v_{10}k(-\theta_B + \theta_B^2 + 1) \simeq v_{10}k(1 - \theta_B) \end{cases}$$

よって $\theta_B \ll 1$ 極限では、fast-mode が slow-mode よりも若干音波的であるがあまり大差ないように思われる。

(b). $\theta_B \rightarrow \pi/2$ のとき、 $\theta_B = \pi/2 - \delta (\delta \ll 1)$ とおくと

$$\text{fast-mode} : \frac{v_{1x}}{v_{1z}} = \frac{\cos(\pi/2 - \delta)}{1 - \sin(\pi/2 - \delta)} = \frac{\sin \delta}{1 - \cos \delta} \simeq \frac{\delta}{1 - (1 - \delta^2/2)} = \frac{2}{\delta} \quad (122)$$

$$\text{slow-mode} : \frac{v_{1x}}{v_{1z}} = -\frac{\cos(\pi/2 - \delta)}{1 + \sin(\pi/2 - \delta)} = -\frac{\sin \delta}{1 + \cos \delta} \simeq -\frac{\delta}{2} \quad (123)$$

$$\therefore \begin{cases} \text{fast-mode} : \mathbf{v}_{1f} \simeq v_{10}(2, \delta) \\ \text{slow-mode} : \mathbf{v}_{1s} \simeq v_{10}(-\delta, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{1f} = v_{10}k(2 \sin(\pi/2 - \delta) + \delta \cos(\pi/2 - \delta)) \simeq 2v_{10}k \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{1s} = v_{10}k(-\delta \sin(\pi/2 - \delta) + 2 \cos(\pi/2 - \delta)) \simeq v_{10}k\delta (\ll 1) \end{cases}$$

よって $\theta_B \rightarrow \pi/2$ の極限では fast-mode が明らかに音波的で、slow-mode はほぼ Alfvén 的であると言ってよい。

(iii). $C_s \ll v_A$ のとき (磁気圧優勢のとき)、同様に $\alpha \equiv C_s^2/v_A^2 (\ll 1)$ とおくと

$$(105) \Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2 v_A^2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \alpha \pm \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 4\alpha \cos^2 \theta_B} \right\} \simeq \frac{1}{2} \left\{ 1 + \alpha \pm \sqrt{1 + 2\alpha(1 - 2\cos^2 \theta_B)} \right\} \\ \simeq \frac{1}{2} \left[1 + \alpha \pm \left\{ 1 + (1 - 2\cos^2 \theta_B)\alpha - \frac{1}{2}(1 - 2\cos^2 \theta_B)^2 \alpha^2 \right\} \right] \quad (124)$$

$$(103) \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \text{両辺 } k^2 v_A^2 \text{ で割る} \end{array} \left(\begin{array}{cc} 1 + \alpha \sin^2 \theta_B - \frac{\omega^2}{k^2 v_A^2} & \alpha \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \alpha \sin \theta_B \cos \theta_B & \alpha \cos^2 \theta_B - \frac{\omega^2}{k^2 v_A^2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1z} \end{pmatrix} = 0 \quad (125)$$

磁気圧優勢の場合の固有ベクトルを求めることは至難の業である。というのも、磁気圧が優勢なので流体の運動は磁場に沿った方向かそうでないかの2種類に分けられ、波の進行方向とは何ら関係ない。というわけで、固有ベクトルは求めず、

$$\left(1 + \alpha \sin^2 \theta_B - \frac{\omega^2}{k^2 v_A^2}\right) v_{1x} + \alpha \sin \theta_B \cos \theta_B v_{1z} = 0 \implies \frac{v_{1x}}{v_{1z}} = \frac{\alpha \sin \theta_B \cos \theta_B}{\frac{\omega^2}{k^2 v_A^2} - 1 - \alpha \sin^2 \theta_B} \quad (126)$$

から波動の様子を見極める。

$$\frac{\omega_+^2}{k^2 v_A^2} = \frac{1}{2} \left[2 + 2(1 - \cos^2 \theta_B) \alpha - \frac{1}{2} (1 - 2 \cos^2 \theta_B)^2 \alpha^2 \right] = 1 + \alpha \sin^2 \theta_B - \frac{1}{4} (1 - 2 \cos^2 \theta_B)^2 \alpha^2 \quad (127)$$

のとき (fast-mode)

$$\frac{v_{1x}}{v_{1z}} \propto \frac{1}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \infty \quad (128)$$

すなわち $v_{1z} = 0$, v_{1x} のみが値をもつ。これは磁場に対して垂直な方向に流体が運動することを意味しており、fast-mode は Alfvén 的であるということがわかる。

$$\frac{\omega_-^2}{k^2 v_A^2} = \frac{1}{2} \left[2\alpha \cos^2 \theta_B + \frac{1}{2} (1 - 2 \cos^2 \theta_B)^2 \alpha^2 \right] = \alpha \cos^2 \theta_B + \frac{1}{4} (1 - 2 \cos^2 \theta_B)^2 \alpha^2 \quad (129)$$

のとき (slow-mode)

$$\frac{v_{1x}}{v_{1z}} = \frac{\alpha \sin \theta_B \cos \theta_B}{\alpha \cos^2 \theta_B + \frac{1}{4} (1 - 2 \cos^2 \theta_B)^2 \alpha^2 - 1 - \alpha \sin^2 \theta_B} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0 \quad (130)$$

すなわち $v_{1x} = 0$, v_{1z} のみが値をもつ。これは磁場に対して平行な方向に流体が運動することを意味しており、slow-mode は音波的であるということがわかる。

磁場が弱いときと強いときとで、同一の mode であるにもかかわらず音波的振動と Alfvén 的振動との入れ替わりが起こる。

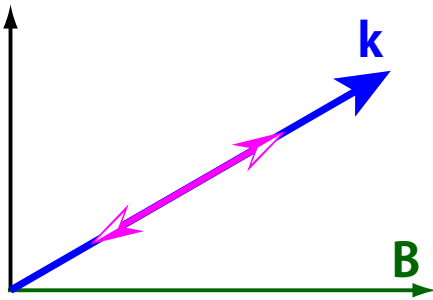


fig 12: $C_s \gg v_A$ での fast-mode.

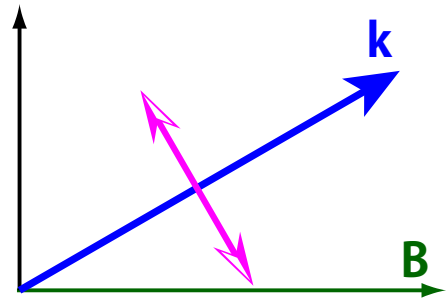


fig 13: $C_s \gg v_A$ での slow-mode.

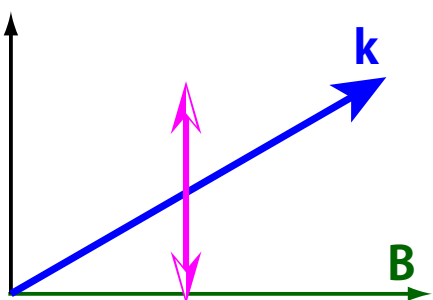


fig 14: $C_s \ll v_A$ での fast-mode.

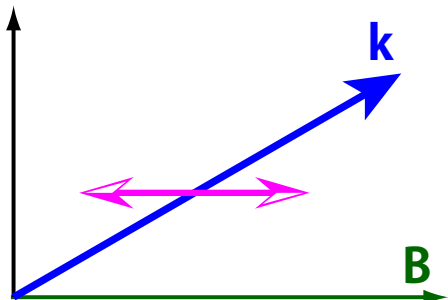


fig 15: $C_s \ll v_A$ での slow-mode.

再び (105) 式にもどる。slow-mode において、その位相速度の背景磁場に沿った成分を考えると

$$\frac{\omega_-^2}{k^2 \cos^2 \theta_B} = \frac{C_s^2 + v_A^2 - \sqrt{(C_s^2 + v_A^2)^2 - 4C_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B}}{2 \cos^2 \theta_B} \quad (131)$$

この $\theta_B \rightarrow \pi/2$ 極限を考える。普通に考えれば先ほどの figmagnetoacousticwaveVp1~magnetoacousticwaveVp3 より、 $\theta_B = \pi/2$ 方向へは slow-mode は伝播しないことになっているが、厳密に計算すると背景磁場に沿った成分が極限として残る。ロピタルの定理より

$$\frac{\omega_-^2}{k^2 \cos^2 \theta_B} \xrightarrow{\theta_B \rightarrow \pi/2} \frac{-\frac{8C_s^2 v_A^2 \sin \theta_B \cos \theta_B}{\sqrt{(C_s^2 + v_A^2)^2 - 4C_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B}}}{-4 \sin \theta_B \cos \theta_B} = \frac{C_s^2 v_A^2 \sin 2\theta_B}{\sin 2\theta_B \sqrt{(C_s^2 + v_A^2)^2 - 4C_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B}} = \frac{C_s^2 v_A^2}{C_s^2 + v_A^2} \quad (132)$$

となる。これは波面がつまんでいくことにより、それを射影した成分が 0 ではなく有限の値となること意味している。

ここまで位相速度の話をしてきたが、最後に群速度 (group velocity) を計算しよう。

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \mathbf{e}_k + \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \quad (133)$$

$\omega \propto k$ より第一項は v_p である。

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega^2}{\partial \theta} &= \frac{2}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \pm \frac{1}{4} \frac{-8C_s^2 v_A^2 \cos \theta_B \sin \theta_B}{\sqrt{(C_s^2 + v_A^2)^2 - 4C_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B}} \\ \Rightarrow \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \theta_B} &= \frac{k}{\omega} \frac{\mp C_s^2 v_A^2 \cos \theta_B \sin \theta_B}{\sqrt{(C_s^2 + v_A^2)^2 - 4C_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B}} = \mp \frac{k \cos \theta_B}{\omega} \frac{C_s^2 v_A^2 \sin \theta_B}{\sqrt{(C_s^2 + v_A^2)^2 - 4C_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B}} \end{aligned} \quad (134)$$

$$\mathbf{v}_g = v_p \mathbf{e}_k \mp \frac{k \cos \theta_B}{\omega} \frac{C_s^2 v_A^2 \sin \theta_B}{\sqrt{(C_s^2 + v_A^2)^2 - 4C_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B}} \mathbf{e}_\theta \quad (135)$$

fast-mode と slow-mode では、群速度はかなり変化する。

fast-mode では $k/\omega = v_p^{-1}$ はどの θ_B の方向においても有限の値をもつ。

slow-mode では $\theta_B \rightarrow \pi/2$ の極限で $v_p \rightarrow 0$, $\frac{k \cos \theta_B}{\omega} \rightarrow \frac{(C_s^2 + v_A^2)^{1/2}}{C_s v_A}$ よりとなり、有限ではあるが特別な値を持つ。

$$c_T \equiv \frac{v_A C_s}{(v_A^2 + C_s^2)^{1/2}} \quad (136)$$

を cusp speed と呼ぶ。

acoustic gravity wave

(22) より磁場と回転を無視 ($B = \Omega = 0$) とすると

$$\omega^2 \mathbf{v}_1 = C_s^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) + i(\gamma - 1)g(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{e}_z + ig \mathbf{k} v_{1z} \quad (137)$$

$\mathbf{k} = (k_x, k_z)$, $\mathbf{v}_1 = (v_{1x}, v_{1z})$ とすると

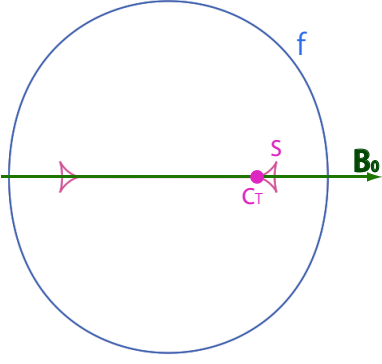


fig 16: $C_s > v_A$

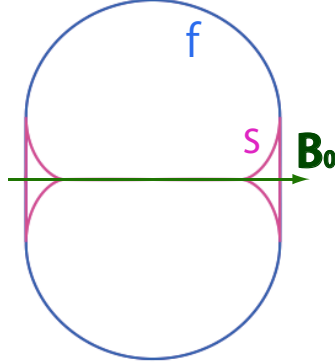


fig 17: $C_s = v_A$

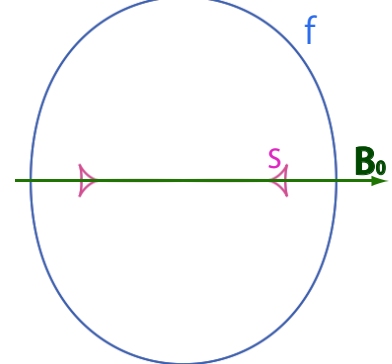


fig 18: $C_s < v_A$

$$\begin{aligned}
\omega^2 \mathbf{v}_1 &= (k_x v_{1x} + k_z v_{1z}) \{C_s^2 \mathbf{k} + i(\gamma - 1)g \mathbf{e}_z\} + i g v_{1z} \mathbf{k} = \begin{pmatrix} C_s^2 (k_x v_{1x} + k_z v_{1z}) k_x + i g v_{1z} k_x \\ C_s^2 (k_x v_{1x} + k_z v_{1z}) k_z + i(\gamma - 1)g (k_x v_{1x} + k_z v_{1z}) + i g v_{1z} k_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_s^2 k_x^2 v_{1x} + (C_s^2 k_x k_z + i g k_x) v_{1z} \\ \{C_s^2 k_z + i(\gamma - 1)g\} k_x v_{1x} + \{i(\gamma - 1)g + C_s^2 k_z + i g\} k_z v_{1z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_s^2 k_x^2 v_{1x} + (C_s^2 k_z + i g) k_x v_{1z} \\ \{C_s^2 k_z + i(\gamma - 1)g\} k_x v_{1x} + (i\gamma g + C_s^2 k_z) k_z v_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_s^2 k_x^2 & (C_s^2 k_z + i g) k_x \\ \{C_s^2 k_z + i(\gamma - 1)g\} k_x & (i\gamma g + C_s^2 k_z) k_z \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} C_s^2 k_x^2 - \omega^2 & (C_s^2 k_z + i g) k_x \\ \{C_s^2 k_z + i(\gamma - 1)g\} k_x & (i\gamma g + C_s^2 k_z) k_z - \omega^2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \tag{138}
\end{aligned}$$

$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ のより、この式が恒等的に成り立つためには逆行列が存在してはならないので、行列式が 0 である。

$$\begin{aligned}
\therefore (C_s^2 k_x^2 - \omega^2) \{i\gamma g + C_s^2 k_z\} k_z - \omega^2 - \{(C_s^2 k_z + i g) k_x\} \{C_s^2 k_z + i(\gamma - 1)g\} k_x &= 0 \\
\Rightarrow \omega^4 - (C_s^2 k_x^2 + i\gamma g k_z + C_s^2 k_z^2) \omega^2 + C_s^2 k_x^2 (i\gamma g k_z + C_s^2 k_z^2) - (C_s^2 k_z + i g) \{C_s^2 k_z + i(\gamma - 1)g\} k_x^2 &= 0 \\
\Rightarrow \omega^4 - \left(k_x^2 + k_z^2 + i \frac{\gamma g}{C_s^2} k_z \right) C_s^2 \omega^2 + C_s^2 k_x^2 (i\gamma g k_z + C_s^2 k_z^2) - \{C_s^4 k_z^2 + i(\gamma - 1)g C_s^2 k_z + i g C_s^2 k_z - (\gamma - 1)g^2\} k_x^2 &= 0 \\
\Rightarrow \omega^4 - \left\{ k_x^2 + \left(k_z + i \frac{\gamma g}{2C_s^2} \right)^2 + \frac{\gamma^2 g^2}{4C_s^4} \right\} C_s^2 \omega^2 + (\gamma - 1)g^2 k_x^2 &= 0 \tag{139}
\end{aligned}$$

ここで

$$N^2 \equiv \frac{(\gamma - 1)g^2}{C_s^2}, \quad N_s^2 \equiv \frac{\gamma g}{2C_s}, \quad \mathbf{k}' \equiv \mathbf{k} + i \frac{N_s^2}{C_s} \mathbf{e}_z, \quad \sin \theta'_g \equiv 1 - \frac{k_z'^2}{k'^2} = \frac{k_x^2}{k'^2} \tag{140}$$

などを定義すると

$$\omega^4 - \left(k'^2 + \frac{N_s^2}{C_s^2} \right) C_s^2 \omega^2 + N^2 C_s^2 k'^2 \sin^2 \theta'_g = 0 \tag{141}$$

となる。 $\gamma = 2$ のとき $N_s = N$ となるが、これは現実的ではない。 $\gamma = 5/3$ の理想気体のとき $N_s \simeq 1.02N$ であり、大抵は $N_s \geq N$ となる。 $\omega \ll k'^2 C_s^2$ のとき $\omega \simeq N \sin \theta'_g$ となり、これは内部重力波のモード (g-mode) である。逆に $\omega \gg N$

のとき $\omega \simeq k' C_s$ となり、これは音波のモード (p-mode) である。この波が垂直方向へ伝播していくとき ($\theta'_g = 0$ のとき)、 $\omega^2 = N_s^2 + k'^2 C_s^2$ となり、 $\omega > N_s$ の波のみ存在しうる。

垂直で無い方向に伝播が許される波の解 ($k'^2 > 0, \omega^2 > 0$) には 2 つある。

$$(141) \implies \omega^2 = \frac{1}{2} \left(k'^2 C_s^2 + N_s^2 \pm \sqrt{(k'^2 C_s^2 + N_s^2)^2 - 4N^2 C_s^2 k'^2 \sin^2 \theta'_g} \right) \quad (142)$$

より、波として許されるのは $\omega < N \sin \theta'_g$ or $\omega > N_s$ の 2 つである。振動数の大きいモードは基本的に p-mode だが、群速度は $v_g < C_s$ であり、位相速度は $v_p > C_s$ である。 $\omega \rightarrow N_s$ の極限では $v_p \rightarrow \infty, v_g \rightarrow 0$ となる。振動数の小さいモードは基本的に g-mode であり、位相速度は $v_p < C_s$ である。 $\omega \rightarrow N \sin \theta'_g$ の極限では $v_p \rightarrow 0$ となる。 N_s と $N \sin \theta'_g$ の間の振動数の波は伝播できない (もしくは少し伝播して、減衰して消えていく)。しかし、 k' が純虚数の場合には摂動振幅が指数的に増加、あるいは減少していくことがありうる。実際には $N \sin \theta'_g < \omega < N_s$ の波は定在波として存在することができるが、この場合には (p_1 と v_1 の位相が反転しているため) エネルギーを伝播することはできない。

続いて、ある k_x, ω に対して波が垂直方向に伝播していくことができるかどうかを見極めてみよう。(141) 式より

$$\begin{aligned} \omega^4 - \left(k_x^2 + k_z^2 + \frac{N_s^2}{C_s^2} \right) C_s^2 \omega^2 + N^2 C_s^2 k_x^2 &= \omega^2 (\omega^2 - N_s^2) - (\omega^2 - N^2) C_s^2 k_x^2 - k_z'^2 C_s^2 \omega^2 = 0 \\ \implies \omega^2 (\omega^2 - N_s^2) - (\omega^2 - N^2) C_s^2 k_x^2 &= k_z'^2 C_s^2 \omega^2 \end{aligned} \quad (143)$$

$k_x^2 > 0, \omega^2 > 0$ で垂直方向への伝播が許される、すなわち $k_z'^2 > 0$ が成り立つには

$$\omega^2 (\omega^2 - N_s^2) > (\omega^2 - N^2) C_s^2 k_x^2 \quad (144)$$

でなければならない。これが成り立っている領域を $\omega - k_x$ 平面で図示すると fig19 のようになる。この図のことを diagnostic diagram と呼ぶこともある。

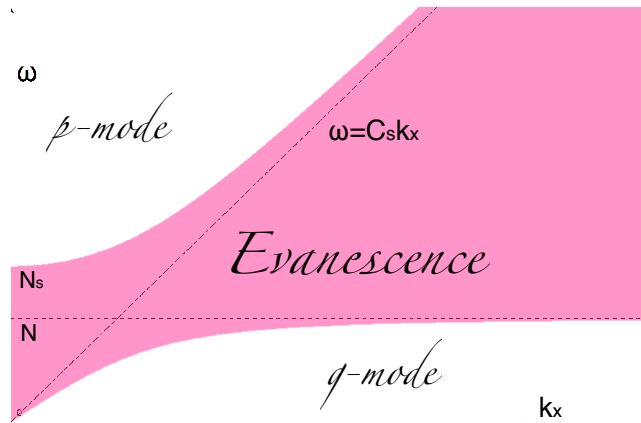


fig 19: (144) 式を $\omega - k_x$ 平面に図示したもの。図中の色づけした部分が evanescence 部で、波が伝播できない領域。 $\omega < N$ の領域が g-mode、 $\omega > N_s$ の領域が p-mode である。

$k_x \ll 1$ のとき、(144) 式の条件は

$$\omega^4 - \left(k_x^2 + \frac{N_s^2}{C_s^2} \right) C_s^2 \omega^2 + N^2 C_s^2 k_x^2 = 0 \implies \omega^2 = \frac{\left(k_x^2 + \frac{N_s^2}{C_s^2} \right) C_s^2 \pm \sqrt{\left(k_x^2 + \frac{N_s^2}{C_s^2} \right)^2 C_s^4 - 4N^2 C_s^2 k_x^2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega^2 &\simeq \frac{N_s^2 \pm \sqrt{N_s^4 - 4N^2 C_s^2 k_x^2}}{2} = N_s^2 \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{N^2}{N_s^4} C_s^2 k_x^2}}{2} \simeq \frac{N_s^2}{2} \left\{ 1 \pm \left(1 - 2\frac{N^2}{N_s^4} C_s^2 k_x^2 \right) \right\} \\ \therefore \omega^2 &= N_s^2, \frac{N^2}{N_s^2} C_s^2 k_x^2 \end{aligned} \quad (145)$$

より $\omega > N_s$, $\omega < (N/N_s)k_x C_s$ となる。一方で $k_x \gg 1$ のときは

$$\begin{aligned} \omega^4 - \left(k_x^2 + \frac{N_s^2}{C_s^2} \right) C_s^2 \omega^2 + N^2 C_s^2 k_x^2 &= 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\left(k_x^2 + \frac{N_s^2}{C_s^2} \right) C_s^2 \pm \sqrt{\left(k_x^2 + \frac{N_s^2}{C_s^2} \right)^2 C_s^4 - 4N^2 C_s^2 k_x^2}}{2} \\ \Rightarrow \omega^2 &\simeq \frac{k_x^2 C_s^2 \pm \sqrt{k_x^4 C_s^2 - 4N^2 C_s^2 k_x^2}}{2} = k_x^2 C_s^2 \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{N^2}{k_x^2 C_s^2}}}{2} \simeq \frac{k_x^2 C_s^2}{2} \left\{ 1 \pm \left(1 - 2\frac{N^2}{k_x^2 C_s^2} \right) \right\} \\ \therefore \omega^2 &= k_x^2 C_s^2, N^2 \end{aligned} \quad (146)$$

より $\omega > k_x C_s$, $\omega < N$ となる。 k_x が小さいとき、p-mode は重力によって N_s 以下で振動することができず、逆に g-mode は音波の圧縮性により $k C_s$ 以上で振動することができない。

Bibliography

- [1] E. R. Priest., *Solar Magneto-hydro Dynamics*
- [2] 加藤正二, "天体物理学基礎理論"
- [3] 観山正見, 野本憲一, 二間瀬敏史, "天体物理学の基礎 II"