

Rayleigh-Taylor, Kelvin-Helmholtz instability

update:16/Dec/2011, presented by Sho Nakamura

直感的理解

Rayleigh-Taylor 不安定性と Kelvin-Helmholtz 不安定性は星間空間や超新星残骸における物質混合の重要を理解するのに重要な不安定性である。まずは直感的に理解することから始めよう。以下は fig1 のような座標設定で議論を進める。

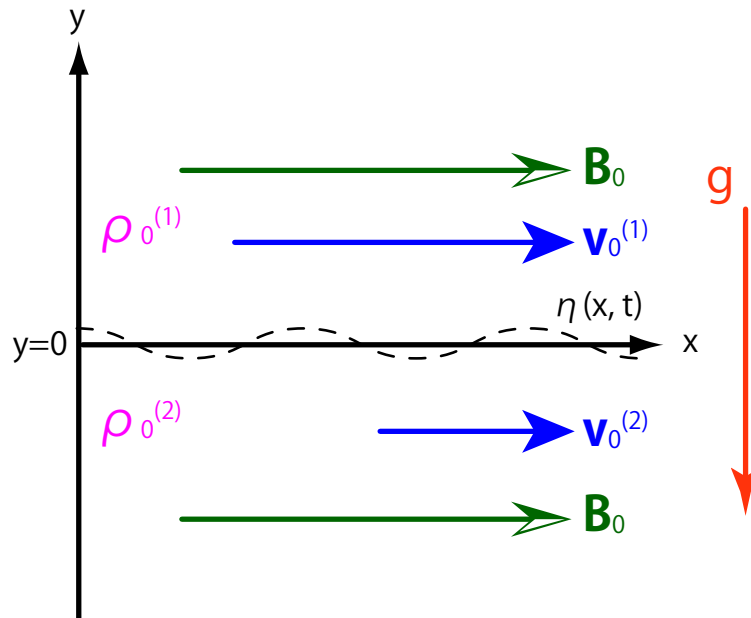


fig 1: Rayleigh-Taylor, Kelvin-Helmholtz instability を考える上での座標設定。

Rayleigh-Taylor instability

fig1 において $\rho_0^{(1)} > \rho_0^{(2)}$ のように重たい流体が軽い流体の上に乗っているとする。今、2 流体の境界面上に微小な摂動が加わり、fig2 のように変形したとする。すると、下から突き上げられた部分は周囲よりも軽いため、浮力を感じてより上昇する。逆に上から下に突き出た部分は周囲よりも重いため、重力でさらに下降を始める。こうして、上に乗っていた重い流体と下にいた軽い流体の混合が起こる。これを Rayleigh-Taylor instability と呼ぶ。

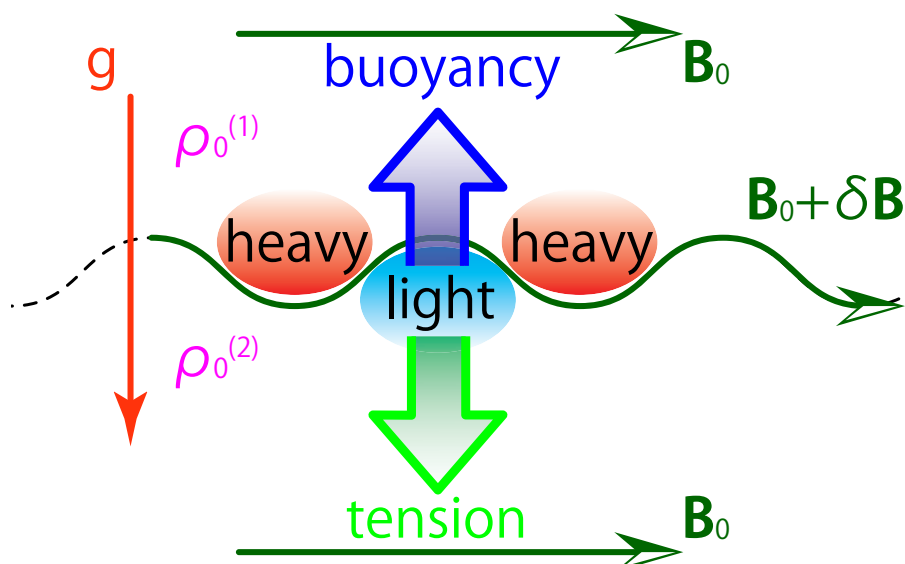


fig 2: Rayleigh-Taylor instability の直感的理解。

Kelvin-Helmholtz instability

fig1 において $v_0^{(1)} \neq v_0^{(2)}$ のように 2 流体の間に速度シアーが発生していたとする。今、2 流体の境界面上に微小な摂動が加わり、fig3 のように変形したとする。簡単のためガリレイ変換を行い、どちらかの速度のみ観測されるような系に移って考える (今の場合、下の流体の速度を残した)。摂動により、境界面と平行に流れていた流体の軌道が曲げられ、流体は遠心力を感じるようになる。これにより摂動はその振幅を増大させ、2 流体の混合が起こる。これを Kelvin-Helmholtz instability と呼ぶ。

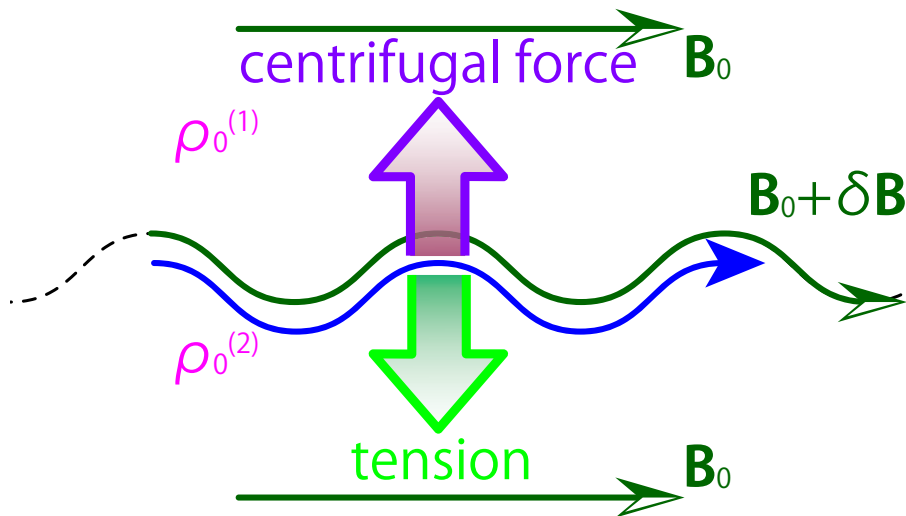


fig 3: Kelvin-Helmholtz instability の直感的理解。

磁場がある場合。

x 方向に一樣な背景磁場が存在する場合には、摂動により磁力線もその形を変える。結果として magnetic tension が発生し、それはこれら 2 つの不安定性を安定化させる方向にはたらくことが fig2, 3 からも理解できるだろう。

basic equations & linear analysis

簡単のため、非圧縮を仮定する。すなわち

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

質量保存

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

運動量保存

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \left\{ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \mathbf{B} + \left(p + \frac{1}{8\pi} B^2 \right) \mathbf{I} \right\} = -\rho g \mathbf{e}_y \quad (3)$$

誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

磁場の Gauss 則

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

最初、系は定常状態にあるとする。そのときの物理量をそれぞれ

$$\rho = \rho_0, \quad \mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0), \quad \mathbf{B}_0 = (B_0, 0, 0), \quad p = p_0 \quad (6)$$

とする。問題設定より、 ρ_0, v_0, p_0 は y のみの関数、磁場は一様であるとして $B_0 = \text{uniform}$ とする。(1)~(5) 式より

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0 \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \left\{ \rho_0 \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0 + \left(p_0 + \frac{1}{8\pi} B_0^2 \right) \mathbf{I} \right\} = -\rho_0 g \mathbf{e}_y \quad (9)$$

$$\nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0) = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (11)$$

が成立している。ここに微小な擾乱が加わり、物理量がそれぞれ

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v} = (v_0 + \delta v_x, \delta v_y, 0), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B} = (B_0 + \delta B_x, \delta B_y, 0), \quad p = p_0 + \delta p \quad (12)$$

のように変化したとしよう。これらを (1)~(5) 式に代入する。

$$(1) \implies \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{v}_0}_{(7)} + \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (2) \implies \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \delta\rho) + \nabla \cdot \{(\rho_0 + \delta\rho)(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v})\} &= \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + \underbrace{\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0)}_{(8)} + \nabla \cdot (\delta\rho \mathbf{v}_0 + \rho_0 \delta\mathbf{v}_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + \nabla \cdot (\delta\rho \mathbf{v}_0 + \rho_0 \delta\mathbf{v}_0) = \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\delta\rho + \delta\rho \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{v}_0)}_{(7)} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho_0 + \rho_0 \underbrace{(\nabla \cdot \delta\mathbf{v})}_{(13)} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\delta\rho + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho_0 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (3) \implies \frac{\partial}{\partial t} \{(\rho_0 + \delta\rho)(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v})\} \\ + \nabla \cdot \left\{ (\rho_0 + \delta\rho)(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v})(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B})(\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}) + \left(p_0 + \delta p + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}) \right) \mathbf{I} \right\} \\ = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \delta\mathbf{v} + \delta\rho \mathbf{v}_0) + \nabla \cdot \{ \rho_0 \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \delta\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v}_0 \delta\mathbf{v} + \rho_0 \delta\mathbf{v} \mathbf{v}_0 \\ - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0 \delta\mathbf{B} + \delta\mathbf{B} \mathbf{B}_0) + \left(p_0 + \delta p + \frac{1}{8\pi} (B_0^2 + 2\delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0) \right) \mathbf{I} \} = -(\rho_0 + \delta\rho) g \mathbf{e}_y \\ \stackrel{(9)}{\implies} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \delta\mathbf{v} + \delta\rho \mathbf{v}_0) + \nabla \cdot \left\{ \delta\rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v}_0 \delta\mathbf{v} + \rho_0 \delta\mathbf{v} \mathbf{v}_0 - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_0 \delta\mathbf{B} + \delta\mathbf{B} \mathbf{B}_0) + \left(\delta p + \frac{1}{4\pi} \delta\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 \right) \mathbf{I} \right\} = -\delta\rho g \mathbf{e}_y \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \implies \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}) - \nabla \times \{(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) \times (\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B})\} &= \frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_0 \times \delta\mathbf{B} + \delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \\
&\stackrel{(10)}{=} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{B}}_{(10)} - \nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \delta\mathbf{B} + \delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{16}$$

$$(5) \implies \nabla \cdot (\mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}) \stackrel{(11)}{=} \nabla \cdot \delta\mathbf{B} = 0 \tag{17}$$

1次の摂動量までを残した。また0の添字のついた物理量は定常状態における量なので、その時間微分は0としている。

$$(13) \implies \frac{\partial}{\partial x}\delta v_x + \frac{\partial}{\partial y}\delta v_y = 0 \tag{18}$$

$$(14) \implies \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\delta\rho + \delta v_x \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \delta v_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\delta\rho + \delta v_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = 0 \tag{19}$$

$$(17) \implies \frac{\partial}{\partial x}\delta B_x + \frac{\partial}{\partial y}\delta B_y = 0 \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
(15)_x \implies \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\delta v_x + v_0 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho}_{(19)} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\delta\rho\mathbf{v}_0)_x v_0 + (\rho_0\mathbf{v}_0)_x \delta v_x + (\rho_0\delta\mathbf{v})_x v_0 - \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}_0)_x \delta B_x - \frac{1}{4\pi}(\delta\mathbf{B})_x B_0 + \delta p + \frac{1}{4\pi}\delta B_x B_0 \right\} \\
+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\rho_0\mathbf{v}_0)_x \delta v_y - \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}_0)_x \delta B_y \right\} = 0 \\
\implies \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\delta v_x - v_0 \left(v_0 \frac{\partial}{\partial x}\delta\rho - \delta v_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_0^2 \delta\rho + 2\rho_0 v_0 \delta v_x - \frac{1}{4\pi} B_0 \delta B_x + \delta p \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_0 v_0 \delta v_y - \frac{1}{4\pi} B_0 \delta B_y \right) = 0 \\
\implies \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\delta v_x - v_0^2 \frac{\partial}{\partial x}\delta\rho - v_0 \delta v_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + v_0^2 \frac{\partial}{\partial x}\delta\rho + 2\rho_0 v_0 \frac{\partial}{\partial x}\delta v_x - \frac{1}{4\pi} B_0 \frac{\partial}{\partial x}\delta B_x + \frac{\partial}{\partial x}\delta p \\
+ v_0 \delta v_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \rho_0 \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} + \rho_0 v_0 \frac{\partial}{\partial y}\delta v_y - \frac{1}{4\pi} B_0 \frac{\partial}{\partial y}\delta B_y \\
= \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\delta v_x + 2\rho_0 v_0 \frac{\partial}{\partial x}\delta v_x - \frac{1}{4\pi} B_0 \frac{\partial}{\partial x}\delta B_x + \frac{\partial}{\partial x}\delta p + \rho_0 \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} + \rho_0 v_0 \frac{\partial}{\partial y}\delta v_y - \frac{1}{4\pi} B_0 \frac{\partial}{\partial y}\delta B_y \\
= \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\delta v_x + \rho_0 v_0 \frac{\partial}{\partial x}\delta v_x + \rho_0 v_0 \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta v_x + \frac{\partial}{\partial y}\delta v_y \right)}_{(18)} - \frac{1}{4\pi} B_0 \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta B_x + \frac{\partial}{\partial y}\delta B_y \right)}_{(20)} + \frac{\partial}{\partial x}\delta p + \rho_0 \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
\implies \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\delta v_x + \rho_0 v_0 \frac{\partial}{\partial x}\delta v_x + \frac{\partial}{\partial x}\delta p + \rho_0 \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
(15)_y \implies \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\delta v_y + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\delta\rho\mathbf{v}_0)_y v_0 + (\rho_0\mathbf{v}_0)_y \delta v_x + (\rho_0\delta\mathbf{v})_y v_0 - \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}_0)_y \delta B_x - \frac{1}{4\pi}(\delta\mathbf{B})_y B_0 \right\} \\
+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\delta\rho\mathbf{v}_0)_y \cdot 0 + (\rho_0\mathbf{v}_0)_y \delta v_y + (\rho_0\delta\mathbf{v})_y \cdot 0 - \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}_0)_y \delta B_y - \frac{1}{4\pi}(\delta\mathbf{B})_y \cdot 0 + \delta p + \frac{1}{4\pi}\delta B_x B_0 \right\} \\
= \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\delta v_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 \delta v_y v_0 - \frac{1}{4\pi} \delta B_y B_0 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta p + \frac{1}{4\pi} \delta B_x B_0 \right) \\
= \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\delta v_y + \rho_0 v_0 \frac{\partial}{\partial x}\delta v_y - \frac{1}{4\pi} B_0 \frac{\partial}{\partial x}\delta B_y + \frac{\partial}{\partial y}\delta p + \frac{1}{4\pi} B_0 \frac{\partial}{\partial y}\delta B_x = -\delta\rho g
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
(16)_x \implies \frac{\partial}{\partial t} \delta B_x - \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{v}_0 \times \delta \mathbf{B} + \delta \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)_z &= \frac{\partial}{\partial t} \delta B_x - \frac{\partial}{\partial y} (v_0 \delta B_y - \delta v_y B_0) = \frac{\partial}{\partial t} \delta B_x - \delta B_y \frac{\partial v_0}{\partial y} - v_0 \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \delta B_y}_{(20)} + B_0 \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \delta v_y}_{(18)} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \delta B_x - \delta B_y \frac{\partial v_0}{\partial y} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \delta B_x - B_0 \frac{\partial}{\partial x} \delta v_x = 0 \tag{23}
\end{aligned}$$

$$(16)_y \implies \frac{\partial}{\partial t} \delta B_y + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v}_0 \times \delta \mathbf{B} + \delta \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)_z = \frac{\partial}{\partial t} \delta B_y + \frac{\partial}{\partial x} (v_0 \delta B_y - \delta v_y B_0) = \frac{\partial}{\partial t} \delta B_y + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \delta B_y - B_0 \frac{\partial}{\partial x} \delta v_y = 0 \tag{24}$$

ここで $\rho, \mathbf{v}, \mathbf{B}, p$ の微小振動の 1 つの Fourier モードに着目する、すなわち

$$\delta \rho, \delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{B}, \delta p \propto e^{i(kx - \omega t)} \tag{25}$$

とする。

$$(18) \implies ik \delta v_x + \frac{\partial}{\partial y} \delta v_y = 0 \implies \delta v_x = \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial y} \delta v_y \tag{26}$$

$$(19) \implies -i\omega \delta \rho + \delta v_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + ikv_0 \delta \rho = 0 \implies \delta \rho = \frac{i}{kv_0 - \omega} \delta v_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
(21) \implies -i\omega \rho_0 \delta v_x + ik \rho_0 v_0 \delta v_x + ik \delta p + \rho_0 \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} &= -i\rho_0(\omega - kv_0) \delta v_x + ik \delta p + \rho_0 \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \\
\implies \delta p = \frac{\omega - kv_0}{k} \rho_0 \underbrace{\delta v_x}_{(26)} + i \frac{\rho_0}{k} \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} &= i \frac{\omega - kv_0}{k^2} \rho_0 \frac{\partial}{\partial y} \delta v_y + i \frac{\rho_0}{k} \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} \tag{28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(22) \implies -i\omega \rho_0 \delta v_y + ik \rho_0 v_0 \delta v_y - \frac{ik}{4\pi} B_0 \delta B_y + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\delta p}_{(28)} + \frac{1}{4\pi} B_0 \frac{\partial}{\partial y} \delta B_x &= - \underbrace{\delta \rho}_{(27)} g \\
\implies -i\rho_0(\omega - kv_0) \delta v_y - \frac{ik}{4\pi} B_0 \delta B_y + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ i \frac{\omega - kv_0}{k^2} \rho_0 \frac{\partial}{\partial y} \delta v_y + i \frac{\rho_0}{k} \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} \right\} + \frac{1}{4\pi} B_0 \frac{\partial}{\partial y} \delta B_x &= \frac{ig}{\omega - kv_0} \delta v_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \tag{29}
\end{aligned}$$

$$(24) \implies -i\omega \delta B_y + ikv_0 \delta B_y - ikB_0 \delta v_y = -i(\omega - kv_0) \delta B_y - ikB_0 \delta v_y \implies \delta B_y = -\frac{k}{\omega - kv_0} B_0 \delta v_y \tag{30}$$

$$(20) \implies ik \delta B_x + \frac{\partial}{\partial y} \delta B_y = 0 \implies \delta B_x = \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\delta B_y}_{(30)} = -i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_0}{\omega - kv_0} \delta v_y \right) \tag{31}$$

$$(29), (30), (31) \stackrel{\times k^2/i}{\implies}$$

$$-\rho_0 k^2 (\omega - kv_0) \delta v_y + \frac{k^4}{\omega - kv_0} \frac{B_0^2}{4\pi} \delta v_y + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\omega - kv_0) \rho_0 \frac{\partial}{\partial y} \delta v_y + \rho_0 k \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} \right\} - \frac{k^2 B_0^2}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\delta v_y}{\omega - kv_0} \right) = \frac{gk^2}{\omega - kv_0} \delta v_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\omega - kv_0) \rho_0 \frac{\partial}{\partial y} \delta v_y + \rho_0 k \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} \right\} - \rho_0 k^2 (\omega - kv_0) \delta v_y = \frac{k^2 B_0^2}{4\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \left(\frac{\delta v_y}{\omega - kv_0} \right) + \frac{gk^2}{\omega - kv_0} \delta v_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \tag{32}$$

$y \neq 0$ では $\frac{\partial \rho_0}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0$ より

$$(32) \implies (\omega - kv_0)\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta v_y - \rho_0 k^2 (\omega - kv_0) \delta v_y = \frac{k^2 B_0^2}{4\pi(\omega - kv_0)} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \delta v_y$$

$$\implies \left\{ (\omega - kv_0)^2 \rho_0 - \frac{k^2 B_0^2}{4\pi} \right\} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \delta v_y = 0 \quad (33)$$

さらに、境界面から離れるにつれて摂動は小さくなると思えることができるので、上式より

$$\delta v_y = A e^{-k|y|} \quad (34)$$

のような形の解となることがわかる。次に2流体が接している境界面 $y = 0$ について考えよう。摂動が加わったことにより境界面は変形する。その形を $Y = \eta(x, t)$ のように表すと、この境界面は流体とともに運動するので

$$\delta v_y = \frac{D\eta}{Dt} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (v_0 + \delta v_x) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \eta \quad (35)$$

境界面の変動 η についても $\eta \propto e^{i(kx - \omega t)}$ とし、さらに振幅も十分小さいとして線形化すると

$$\delta v_y = \{-i\omega + (v_0 + \delta v_x)ik\}\eta = -i(\omega - kv_0)\eta \quad (36)$$

よって $y = 0$ では上側 (1) と下側 (2) の δv_y の比をとることで

$$\frac{\delta v_y^{(1)}}{\delta v_y^{(2)}} = \frac{\omega - kv_0^{(1)}}{\omega - kv_0^{(2)}} \quad (37)$$

という境界条件が成立していることがわかる。(34), (37) 式より $y \neq 0$ においては

$$\begin{cases} \delta v_y^{(1)} = (\omega - kv_0^{(1)})e^{-ky} \\ \delta v_y^{(2)} = (\omega - kv_0^{(2)})e^{ky} \end{cases} \quad (38)$$

となることがわかる。

(32) 式の境界 $y = 0$ での条件を導出する。境界面を挟んで微少区間 $[-\epsilon : \epsilon]$ での積分を

$$\Delta_s(f) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial f}{\partial y} dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{f(\epsilon) - f(-\epsilon)\} \quad (39)$$

のように定義し、(32) 式の両辺を y に関して微少区間 $[-\epsilon : \epsilon]$ で積分することを考える。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\omega - kv_0)\rho_0 \frac{\partial}{\partial y} \delta v_y + \rho_0 k \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} \right\} dy = \Delta_s \left((\omega - kv_0)\rho_0 \frac{\partial}{\partial y} \delta v_y \right) + \underbrace{\Delta_s \left(\rho_0 k \delta v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ } (\partial v_0 / \partial y = 0 (y \neq 0))} \quad (40)$$

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \rho_0 k^2 (\omega - kv_0) \delta v_y dy \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \left(\frac{\delta v_y}{\omega - kv_0} \right) dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\delta v_y}{\omega - kv_0} \right) - k^2 \left(\frac{\delta v_y}{\omega - kv_0} \right) \right\} dy \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial y} \delta v_y}{\omega - kv_0} + \frac{k \frac{\partial v_0}{\partial y}}{(\omega - kv_0)^2} \right) - k^2 \left(\frac{\delta v_y}{\omega - kv_0} \right) \right\} dy = \Delta_s \left(\frac{\frac{\partial}{\partial y} \delta v_y}{\omega - kv_0} \right) + \underbrace{\Delta_s \left(\frac{k \frac{\partial v_0}{\partial y}}{(\omega - kv_0)^2} \right)}_{=0 \text{ } (\partial v_0 / \partial y = 0 (y \neq 0))} \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} \underbrace{\frac{\delta v_y}{\omega - kv_0}}_{(38)} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} e^{-k|y|} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} dy = e^{-k|y|} \Delta_s(\rho_0) - \overbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} \rho_0 \frac{\partial}{\partial y} e^{-k|y|} dy}_{=\pm k} = \frac{\delta v_y}{\omega - kv_0} \Delta_s(\rho_0) \quad (43)$$

$$\therefore \Delta_s \left((\omega - kv_0) \rho_0 \frac{\partial}{\partial y} \delta v_y \right) = \frac{k^2 B_0^2}{4\pi} \Delta_s \left(\frac{\frac{\partial}{\partial y} \delta v_y}{\omega - kv_0} \right) + k^2 g \frac{\delta v_y}{\omega - kv_0} \Delta_s(\rho_0) \quad (44)$$

(38) 式を上式に代入する。

$$\begin{aligned}
& \Delta_s \left((\omega - kv_0) \rho_0 \frac{\partial}{\partial y} \delta v_y \right) = (\omega - kv_0^{(1)}) \rho_0^{(1)} (\omega - kv_0^{(1)}) (-k) e^{-ky} - (\omega - kv_0^{(2)}) \rho_0^{(2)} (\omega - kv_0^{(2)}) k e^{ky} \\
& \xrightarrow{y \rightarrow 0} -k \{ (\omega - kv_0^{(1)})^2 \rho_0^{(1)} + (\omega - kv_0^{(2)})^2 \rho_0^{(2)} \} \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\Delta_s \left(\frac{\frac{\partial}{\partial y} \delta v_y}{\omega - kv_0} \right) = (-k) e^{-ky} - k e^{ky} \xrightarrow{y \rightarrow 0} -2k \quad (46)$$

$$\Delta_s(\rho_0) = \rho_0^{(1)} - \rho_0^{(2)} \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
& \therefore -k \{ (\omega - kv_0^{(1)})^2 \rho_0^{(1)} + (\omega - kv_0^{(2)})^2 \rho_0^{(2)} \} = -\frac{k^3 B_0^2}{2\pi} + k^2 g (\rho_0^{(1)} - \rho_0^{(2)}) \\
& \Rightarrow (\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}) \omega^2 - 2k (\rho_0^{(1)} v_0^{(1)} + \rho_0^{(2)} v_0^{(2)}) \omega + k^2 (\rho_0^{(1)} v_0^{(1)2} + \rho_0^{(2)} v_0^{(2)2}) - \frac{k^2 B_0^2}{2\pi} + kg (\rho_0^{(1)} - \rho_0^{(2)}) = 0 \\
& \Rightarrow \omega = \frac{k(\rho_0^{(1)} v_0^{(1)} + \rho_0^{(2)} v_0^{(2)})}{\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}} \\
& \quad \pm \frac{\sqrt{4k^2 (\rho_0^{(1)} v_0^{(1)} + \rho_0^{(2)} v_0^{(2)})^2 - 4(\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}) \left\{ k^2 (\rho_0^{(1)} v_0^{(1)2} + \rho_0^{(2)} v_0^{(2)2}) - \frac{k^2 B_0^2}{2\pi} + kg (\rho_0^{(1)} - \rho_0^{(2)}) \right\}}}{2(\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)})} \quad (48)
\end{aligned}$$

ここで

$$\alpha_1 \equiv \frac{\rho_0^{(1)}}{\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}}, \quad \alpha_2 \equiv \frac{\rho_0^{(2)}}{\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}}, \quad v_A^2 \equiv \frac{B_0^2}{4\pi \frac{(\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)})}{2}} = \frac{B_0^2}{2\pi(\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)})} \quad (49)$$

と定義しておく

$$\frac{\omega}{k} = \alpha_1 v_0^{(1)} + \alpha_2 v_0^{(2)} \pm \sqrt{(\alpha_1 v_0^{(1)} + \alpha_2 v_0^{(2)})^2 - (\alpha_1 v_0^{(1)2} + \alpha_2 v_0^{(2)2}) + v_A^2 - \frac{g}{k} (\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_1 v_0^{(1)} + \alpha_2 v_0^{(2)} \pm \sqrt{(\alpha_1^2 - \alpha_1) v_0^{(1)2} + (\alpha_2^2 - \alpha_2) v_0^{(2)2} + 2\alpha_1 \alpha_2 v_0^{(1)} v_0^{(2)} + v_A^2 - \frac{g}{k}(\alpha_1 - \alpha_2)} \\
&= \alpha_1 v_0^{(1)} + \alpha_2 v_0^{(2)} \pm \sqrt{(\alpha_1^2 - \alpha_1) v_0^{(1)2} + (\alpha_2^2 - \alpha_2) v_0^{(2)2} + 2\alpha_1 \alpha_2 v_0^{(1)} v_0^{(2)} + v_A^2 - \frac{g}{k}(\alpha_1 - \alpha_2)} \\
&= \alpha_1 v_0^{(1)} + \alpha_2 v_0^{(2)} \pm \sqrt{-\frac{\rho_0^{(1)} \rho_0^{(2)}}{(\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)})^2} v_0^{(1)2} - \frac{\rho_0^{(1)} \rho_0^{(2)}}{(\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)})^2} v_0^{(2)2} + 2\alpha_1 \alpha_2 v_0^{(1)} v_0^{(2)} + v_A^2 - \frac{g}{k}(\alpha_1 - \alpha_2)} \\
&= \alpha_1 v_0^{(1)} + \alpha_2 v_0^{(2)} \pm \sqrt{-\alpha_1 \alpha_2 v_0^{(1)2} - \alpha_1 \alpha_2 v_0^{(2)2} + 2\alpha_1 \alpha_2 v_0^{(1)} v_0^{(2)} + v_A^2 - \frac{g}{k}(\alpha_1 - \alpha_2)} \\
&= \alpha_1 v_0^{(1)} + \alpha_2 v_0^{(2)} \pm \sqrt{v_A^2 - \alpha_1 \alpha_2 (v_0^{(1)} - v_0^{(2)})^2 - \frac{g}{k}(\alpha_1 - \alpha_2)} \tag{50}
\end{aligned}$$

速度シアがないとき、すなわち $v_0^{(1)} = v_0^{(2)}$ のとき、

$$v_A^2 < \frac{g \rho_0^{(1)} - \rho_0^{(2)}}{k \rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}} \tag{51}$$

で ω が虚数となるため、これは不安定である。これを Rayleigh-Taylor instability と呼ぶ。ただし、磁場がある場合には magnetic tension が、摂動により波打った境界面をもとに戻そうとする方向 (安定化する方向) にはたらく。速度シアが存在し一様重力が存在しないとき、すなわち $g = 0$ のとき

$$v_A^2 < \alpha_1 \alpha_2 (v_0^{(1)} - v_0^{(2)})^2 \tag{52}$$

で同様に ω が虚数となり、不安定である。これを Kelvin-Helmholtz instability と呼ぶ。このときにも磁場は、摂動により波打った境界面をもとに戻そうとする方向 (安定化する方向) にはたらいっていることがわかる。

Richardson number

磁場が存在せず、一様重力場 g において層を成している 2 流体を考える。人間が適当に、境界面付近の下層の流体要素を δy だけ上に持ち上げたとき。このときの流体要素の密度が上層の流体に仲間入りし、その密度が $\rho_0^{(2)}$ に変化したとすると、人間が重力に逆らった仕事は

$$\delta W = -g(\rho_0^{(2)} - \rho_0^{(1)})\delta y \tag{53}$$

と書ける。またこのとき運動エネルギーの変化量は、持ち上げたことによる mixing の効果より $\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}$ の質量の流体要素の塊が運動していると代表させて考えると

$$\frac{1}{2}(\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}) \left(\frac{\rho_0^{(1)} v_0^{(1)} + \rho_0^{(2)} v_0^{(2)}}{\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho_0^{(1)} v_0^{(1)2} - \frac{1}{2} \rho_0^{(2)} v_0^{(2)2} = -\frac{1}{2} \frac{\rho_0^{(1)} \rho_0^{(2)}}{\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}} (v_0^{(1)} - v_0^{(2)})^2 \tag{54}$$

となり、流体の運動エネルギーが減少することがわかる。人間がした仕事よりも運動エネルギーの変化量が大きければ、この交換は可能と考えることができるので、Kelvin-Helmholtz instability が起こるための必要条件は

$$\frac{1}{2} \frac{\rho_0^{(1)} \rho_0^{(2)}}{\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(2)}} (v_0^{(1)} - v_0^{(2)})^2 > -g(\rho_0^{(2)} - \rho_0^{(1)}) \delta y \quad (55)$$

ここで持ち上げた距離 δy は微小で、 $\rho_0^{(2)} = \rho_0^{(1)} + \delta\rho$, $v_0^{(2)} = v_0^{(1)} + \delta v$ とすると

$$\frac{1}{2} \frac{\rho_0^{(1)}(\rho_0^{(1)} + \delta\rho)}{\rho_0^{(1)} + \rho_0^{(1)} + \delta\rho} (-\delta v)^2 \simeq \frac{1}{4} \rho_0^{(1)} (\delta v)^2 > -g\delta\rho\delta y \xrightarrow{\times \delta y^2} \frac{1}{4} \rho_0^{(1)} \left(\frac{\delta v}{\delta y}\right)^2 > -g\frac{\delta\rho}{\delta y} \quad (56)$$

よって、速度場や密度が連続的に変化しているときに Kelvin-Helmholtz instability が起こる必要条件は

$$J \equiv -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho/dy}{(dv/dy)^2} < \frac{1}{4} \quad (57)$$

J を Richardson number と呼ぶ。

examples

超新星爆発により、最初は free expansion していた super nova の衝撃波面には徐々に星周空間の物質が降り積もっていき、波面にブレーキがかかる。衝撃波面に乗った人間から見てみると、このブレーキは衝撃波面に対して外向きの加速度を受けているような慣性力としてはたらく。衝撃波により圧縮された星間物質の外側には圧縮を受けていない希薄な星間物質があり、この2流体の mixing が起こる。

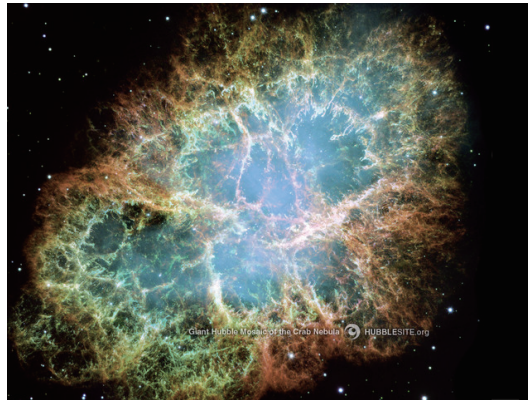


fig 4: Rayleigh-Taylor instability の代表例、超新星残骸。

AGN の中心に位置する Super Massive Black Hole からは相対論的な速度の jet が噴出しており、それが周囲の星間物質との速度シアーにより混合される。



fig 5: Kelvin-Helmholtz instability の代表例、jet と ISM の相互作用。

Bibliography

- [1] 観山 正見, 野本 憲一, 二間瀬 敏史, ”天体物理学の基礎 II”
- [2] Chandrasekhar, S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*
- [3] Hubble site <http://hubblesite.org/>
- [4] Priest, R, E., *Solar Magneto-hydro Dynamics*