MRI(磁気回転不安定性)

update:24/Sep/2011, presented by Sho Nakamura

MRI, 線形解析

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1}$$

Euler eq.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\right] \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \left(P + \frac{1}{8\pi} B^2\right) - \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \nabla \Phi = 0 \tag{2}$$

Induction eq.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \tag{3}$$

Maxwell eq より

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4}$$

これらの式を線形化する。

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta \mathbf{v} \\ \rho = \rho_0 + \delta \rho \\ P = P_0 + \delta P \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B} \end{cases} \tag{5}$$

0 の添字がついているは非摂動量で、(1), (2), (3), (4) 式を満たす。

$$(1) \implies \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned} (2) \implies \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \left(\delta P + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}\right) - \frac{\delta \rho}{{\rho_0}^2} \nabla \left(P_0 + \frac{1}{8\pi} {B_0}^2\right) \\ - \frac{1}{4\pi\rho_0} [(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\delta \mathbf{B} + (\delta \mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}_0] + \frac{\delta \rho}{4\pi {\rho_0}^2} (\mathbf{B_0} \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{7}$$

$$(4) \implies \nabla \cdot \delta \mathbf{B} = 0 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} (3) \implies & \frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times [\delta \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_0 \times \delta \mathbf{B}] \\ = & \frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} - [(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} \overbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B}_0)}^{(4)} - \mathbf{B}_0 (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) - (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 + (\delta \mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \underbrace{(\nabla \cdot \delta \mathbf{B})}_{(8)} - \delta \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}_0) - (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\delta \mathbf{B}] \\ = & \frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} - [(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\delta \mathbf{v} - \mathbf{B}_0 (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) - (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 + (\delta \mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 - \delta \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}_0) - (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\delta \mathbf{B}] = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{9}$$

ここまでは一般論である。円柱座標 (r,φ,z) のもとで z 軸の周りを角速度 $\Omega(r)$ で回転している系を考える (すなわち $\mathbf{v}_0 = v_{0\phi}\mathbf{e}_\varphi = r\Omega(r)\mathbf{e}_\varphi$)。平衡状態では重力と遠心力がつり合っている。一様な背景磁場は $\mathbf{B}_0 = (0, B_{0\varphi}, B_{0z})$ とし、1 次擾乱は $\delta \propto e^{-i\omega t+ikz}$ として、波数は $\mathbf{k} = (0,0,k)$ で書けるとする。また系は軸対称であり、式変形には local analysis より $kr \simeq r/\lambda \gg 1$ を用いる、すなわち 0 の添字のついた非摂動量の微分は無視する。具体的な成分計算をする前に、円筒座標系における以下のベクトル演算を確認しておく。

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{10}$$

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{C} = \left\{(\mathbf{A}\cdot\mathrm{grad})C_r - \frac{A_\varphi C_\varphi}{r}\right\}\mathbf{e}_r + \left\{(\mathbf{A}\cdot\mathrm{grad})C_\varphi + \frac{A_\varphi C_r}{r}\right\}\mathbf{e}_\varphi + \{(\mathbf{A}\cdot\mathrm{grad})C_z\}\,\mathbf{e}_z \tag{11}$$

ここで

$$\mathbf{A}\cdot\mathrm{grad} = A_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + A_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{12}$$

である。では具体的に書き出していこう。

$$(6),(10) \implies \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial\delta v_z}{\partial z} = -i\omega\delta\rho + ik\rho_0\delta v_z = 0 \implies -\omega\frac{\delta\rho}{\rho_0} + k\delta v_z = 0 \tag{13}$$

$$(\delta\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{\delta v_\varphi v_{0\varphi}}{r}\mathbf{e}_r + \delta v_r\frac{\partial v_{0\varphi}}{\partial r}\mathbf{e}_\varphi = -\Omega\delta v_\phi\mathbf{e}_r + \delta v_r\frac{\partial}{\partial r}(r\Omega)\mathbf{e}_\varphi \tag{14}$$

$$(\mathbf{v}_0\cdot\nabla)\delta\mathbf{v} = -\frac{v_0\delta v_\varphi}{r}\mathbf{e}_r + \frac{v_0\delta v_r}{r}\mathbf{e}_\varphi = -\Omega\delta v_\varphi\mathbf{e}_r + \Omega\delta v_r\mathbf{e}_\varphi \tag{15}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\delta\mathbf{B} &= \left(B_{0z}\frac{\partial\delta B_r}{\partial z} - \frac{B_{0\varphi}\delta B_\varphi}{r}\right)\mathbf{e}_r + \left(B_{0z}\frac{\partial\delta B_\phi}{\partial z} + \frac{B_{0\varphi}\delta B_r}{r}\right)\mathbf{e}_\varphi + B_{0z}\frac{\partial\delta B_z}{\partial z}\mathbf{e}_z \\ &= \left(ik_zB_{0z}\delta B_r - \frac{B_{0\varphi}\delta B_\varphi}{r}\right)\mathbf{e}_r + \left(ik_zB_{0z}\delta B_\varphi + \frac{B_{0\varphi}\delta B_r}{r}\right)\mathbf{e}_\varphi + ik_zB_{0z}\delta B_z\mathbf{e}_z \\ &\underbrace{\simeq}_{kr\gg1} ik_zB_{0z}\delta B_r\mathbf{e}_r + ik_zB_{0z}\delta B_\varphi\mathbf{e}_\varphi + ik_zB_{0z}\delta B_z\mathbf{e}_z\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}(\delta\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}_0 &= -\frac{\delta B_\varphi B_{0\varphi}}{r}\mathbf{e}_r + \left(\delta B_r\frac{\partial B_{0\varphi}}{\partial r} + \delta B_z\frac{\partial B_{0\varphi}}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\delta B_r\frac{\partial B_{0z}}{\partial r} + \delta B_z\frac{\partial B_{0z}}{\partial z}\right)\mathbf{e}_z \\ &\underbrace{\simeq}_{\text{local analysis}} -\frac{\delta B_\varphi B_{0\varphi}}{r}\mathbf{e}_r\end{aligned} \tag{17}$$

$$(\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\mathbf{B}_0 = -\frac{{B_{0\varphi}}^2}{r}\mathbf{e}_r + B_{0z}\frac{\partial B_{0\varphi}}{\partial z}\mathbf{e}_\varphi + B_{0z}\frac{\partial B_{0z}}{\partial z}\mathbf{e}_z \underbrace{\simeq}_{\text{local analysis}} -\frac{{B_{0\varphi}}^2}{r}\mathbf{e}_r \tag{18}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\delta\mathbf{v} &= \left(B_{0z}\frac{\partial\delta v_r}{\partial z} - \frac{B_{0\varphi}\delta v_\varphi}{r}\right)\mathbf{e}_r + \left(B_{0z}\frac{\partial\delta v_\varphi}{\partial z} + \frac{B_{0\varphi}\delta v_r}{r}\right)\mathbf{e}_\varphi + B_{0z}\frac{\partial\delta v_z}{\partial z}\mathbf{e}_z \\ &= \left(ik_zB_{0z}\delta v_r - \frac{B_{0\varphi}\delta v_\varphi}{r}\right)\mathbf{e}_r + \left(ik_zB_{0z}\delta v_\varphi + \frac{B_{0\varphi}\delta v_r}{r}\right)\mathbf{e}_\varphi + ik_zB_{0z}\delta v_z\mathbf{e}_z \\ &\underbrace{\simeq}_{\mathrm{kr}\gg1} ik_zB_{0z}\delta v_r\mathbf{e}_r + ik_zB_{0z}\delta v_\varphi\mathbf{e}_\varphi + ik_zB_{0z}\delta v_z\mathbf{e}_z\end{aligned} \tag{19}$$

$$\mathbf{B}_0(\nabla\cdot\delta\mathbf{v})=\mathbf{B}_0\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\delta v_r)+\frac{\partial\delta v_z}{\partial z}\right\}=\left(\frac{\delta v_r}{r}+ik_z\delta v_z\right)\mathbf{B}_0\underbrace{\simeq}_{kr\gg1}ik_z\delta v_z\mathbf{B}_0 \tag{20}$$

$$(\delta\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}_0=-\frac{\delta v_\varphi B_{0\varphi}}{r}\mathbf{e}_r+\left(\delta v_r\frac{\partial B_{0\varphi}}{\partial r}+\delta v_z\frac{\partial B_{0\varphi}}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\varphi+\left(\delta v_r\frac{\partial B_{0z}}{\partial r}+\delta v_z\frac{\partial B_{0z}}{\partial z}\right)\mathbf{e}_z\underbrace{\simeq}_{\text{local analysis}}-\frac{\delta v_\varphi B_{0\varphi}}{r}\mathbf{e}_r \tag{21}$$

$$(\delta\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{v}_0=-\frac{\delta B_\varphi v_{0\varphi}}{r}\mathbf{e}_r+\delta B_r\frac{\partial v_{0\varphi}}{\partial r}\mathbf{e}_\varphi=-\Omega\delta B_\varphi\mathbf{e}_r+\delta B_r\frac{\partial}{\partial r}(r\Omega)\mathbf{e}_\varphi \tag{22}$$

$$\delta\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{v}_0)=0 \tag{23}$$

$$(\mathbf{v}_0\cdot\nabla)\delta\mathbf{B}=-\frac{v_{0\varphi}\delta B_\varphi}{r}\mathbf{e}_r+\frac{v_{0\varphi}\delta B_r}{r}\mathbf{e}_\phi=-\Omega\delta B_\varphi\mathbf{e}_r+\Omega\delta B_r\mathbf{e}_\varphi \tag{24}$$

$\therefore$ (7) 式の r 成分 $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&-i\omega\delta v_r-2\Omega\delta v_\varphi-\frac{\delta\rho}{{\rho_0}^2}\frac{\partial P_0}{\partial r}-\frac{\delta\rho_0}{8\pi{\rho_0}^2}\frac{\partial}{\partial r}({B_{0\phi}}^2+{B_{0z}}^2)\\
&\quad-\frac{1}{4\pi\rho_0}\left(ik_zB_{0z}\delta B_r-\frac{\delta B_\varphi B_{0\varphi}}{r}\right)-\frac{\delta\rho}{4\pi{\rho_0}^2}\frac{{B_{0\phi}}^2}{r}\\
\underbrace{\simeq}_{\text{local analysis}}&-i\omega\delta v_r-2\Omega\delta v_\varphi-\frac{\delta\rho}{\rho_0}\underbrace{\left[\left\{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial r}+\frac{1}{8\pi\rho_0}\frac{\partial}{\partial r}({B_{0\varphi}}^2+{B_{0z}}^2)\right\}+\frac{1}{4\pi\rho_0}\frac{B_{0\varphi}^2}{r}\right]}_{\text{非摂動状態の動径方向の運動方程式より}=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{v_{0\varphi}^2}{r}}-\frac{1}{4\pi\rho_0}ik_zB_{0z}\delta B_r\\
\underbrace{\simeq}_{\delta\rho/\rho_0\ll1}&-i\omega\delta v_r-2\Omega\delta v_\varphi-\frac{ik_z}{4\pi\rho_0}B_{0z}\delta B_r=0
\end{aligned} \tag{25}$$

(7) 式のφ 成分 $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&-i\omega\delta v_\varphi+\delta v_r\frac{\partial}{\partial r}(r\Omega)+\Omega\delta v_r-\frac{1}{4\pi\rho_0}ik_zB_{0z}\delta B_\varphi=-i\omega\delta v_\phi+\delta v_r\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r}+2\Omega\right)-\frac{ik_z}{4\pi\rho_0}B_{0z}\delta B_\varphi\\
&=-i\omega\delta v_\varphi+\frac{\delta v_r}{r}\underbrace{\left(r^2\frac{\partial\Omega}{\partial r}+2r\Omega\right)}_{=\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Omega)}-\frac{ik_z}{4\pi\rho_0}B_{0z}\delta B_\varphi\\
&=-i\omega\delta v_\varphi+\delta v_r\frac{\kappa^2}{2\Omega}-\frac{ik_z}{4\pi\rho_0}B_{0z}\delta B_\varphi=0
\end{aligned} \tag{26}$$

ここで

$$\kappa^2\equiv\frac{2\Omega}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Omega) \tag{27}$$

はエピサイクリック振動数である。

(7) 式の z 成分 $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&-i\omega\delta v_z+\frac{1}{\rho_0}\left(ik_z\delta P+\frac{1}{4\pi}k_zB_{0\varphi}\delta B_\varphi+\frac{1}{4\pi}k_zB_{0z}\delta B_z\right)-\frac{\delta\rho_0}{\rho_0^2}\frac{\partial P_0}{\partial z}-\frac{\delta\rho_0}{8\pi\rho_0^2}\frac{\partial}{\partial z}(B_{0\varphi}^2+B_{0z}^2)-\frac{ik_z}{4\pi\rho_0}B_{0z}\delta B_z\\
\Longrightarrow\ &-i\omega\delta v_z+\frac{1}{\rho_0}\left(ik_z\delta P+\frac{1}{4\pi}k_zB_{0\varphi}\delta B_\varphi+\right)-\frac{\delta\rho_0}{\rho_0}\underbrace{\left\{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}+\frac{1}{8\pi\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}(B_{0\varphi}^2+B_{0z}^2)\right\}}_{\text{非摂動状態の }z\text{ 方向の運動方程式より}=-\frac{d\Phi}{dz}}\\
&\simeq-i\omega\delta v_z+\frac{ik_z}{\rho_0}\delta P+\frac{ik_z}{4\pi\rho_0}B_{0\varphi}\delta B_\varphi=0
\end{aligned} \tag{28}$$

$$(9)\text{ 式の } r \text{ 成分} \implies -i\omega\delta B_r - \left(ik_z B_{0z}\delta v_r + \frac{\delta v_\varphi B_{0\varphi}}{r} - \Omega\delta B_\varphi + \Omega\delta B_\varphi\right) = -i\omega\delta B_r - \left(ik_z B_{0z}\delta v_r - \frac{\delta v_\varphi B_{0\varphi}}{r}\right)$$

$$\underbrace{\simeq}_{kr\gg 1} -i\omega\delta B_r - ik_z B_{0z}\delta v_r = 0 \tag{29}$$

$$(9)\text{ 式の} \varphi \text{ 成分} \implies -i\omega\delta B_\varphi - \left(ik_z B_{0z}\delta v_\varphi - ik_z \delta v_z B_{0\varphi} + \delta B_r \frac{\partial}{\partial r}(r\Omega) - \Omega\delta B_r\right)$$

$$= -i\omega\delta B_\varphi - ik_z(B_{0z}\delta v_\varphi - \delta v_z B_{0\varphi}) - \delta B_r r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = -i\omega\delta B_\varphi - ik_z(B_{0z}\delta v_\varphi - \delta v_z B_{0\varphi}) - \delta B_r r\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

$$= -i\omega\delta B_\varphi - ik_z(B_{0z}\delta v_\varphi - \delta v_z B_{0\varphi}) - \delta B_r \frac{d\Omega}{d\ln r} = 0 \tag{30}$$

$$(9)\text{ 式の } z \text{ 成分} \implies -i\omega\delta B_z - [ik_z B_{0z}\delta v_z - ik_z\delta v_z B_{0z}] = -i\omega\delta B_z = 0 \tag{31}$$

さらに状態方程式は、系が断熱的な運動をしていると仮定して

$$\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{p_0+\delta p}{(\rho_0+\delta\rho)^\gamma} = (p_0+\delta p)\frac{1}{\rho_0^\gamma}(1-\gamma\frac{\delta\rho}{\rho_0}) = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} - \gamma\frac{p_0}{\rho_0^\gamma}\frac{\delta\rho}{\rho_0} + \frac{\delta p}{\rho_0^\gamma} \iff \frac{\delta p}{p_0} = \gamma\frac{\delta\rho}{\rho_0} \implies \delta p = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\delta\rho = C_s^2\delta\rho \tag{32}$$

としよう。
では具体的な分散関係式を導こう。

(i) $\Omega = 0$(回転していない、ただのプラズマ) のとき
r 方向 (磁場に垂直な方向) の分散関係式はすぐに求まり、

$$(25),(29) \implies -i\omega\delta v_r - \frac{ik_z}{4\pi\rho_0}B_{0z}\left(-\frac{k_z B_{0z}\delta v_r}{\omega}\right) = 0 \iff (\omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2)\delta v_r = 0 \tag{33}$$

となる。よって r 方向には横波の Alfven wave が伝播する。続いて、φ, z 方向 (磁場に沿った方向) の分散関係式を求める。

$$(26) \implies \delta v_\varphi = -\frac{1}{\omega}\frac{k_z B_{0z}}{4\pi\rho_0}\delta B_\varphi \tag{34}$$

$$(13),(28),(32) \implies -\omega\delta v_z + \frac{k_z}{\rho_0}\gamma\frac{p_0}{\rho_0}\delta\rho + \frac{B_{0\varphi}k_z}{4\pi\rho_0}\delta B_\varphi = -\omega\delta v_z + \frac{k_z}{\rho_0}\gamma P_0\frac{k_z}{\omega}\delta v_z + \frac{B_{0\varphi}k_z}{4\pi\rho_0}\delta B_\varphi = 0$$

$$\implies \left(-\omega + \frac{k_z^2}{\omega}C_s^2\right)\delta v_z + \frac{B_{0\varphi}k_z}{4\pi\rho_0}\delta B_\varphi = 0 \tag{35}$$

$$(30),(34) \implies -i\omega\delta B_\varphi = ik_z B_{0z}\left(-\frac{1}{\omega}\frac{k_z B_{0z}}{4\pi\rho_0}\right)\delta B_\varphi - ik_z B_{0\varphi}\delta v_z = -\frac{k_z^2 B_{0z}^2}{4\pi\rho_0\omega}\delta B_\varphi - ik_z B_{0\varphi}\delta v_z$$

$$\implies \left(\omega - \frac{k_z^2 V_{Az}^2}{\omega}\right)\delta B_\varphi = k_z B_{0\varphi}\delta v_z \implies \delta B_\varphi = \frac{k_z B_{0\varphi}\omega}{\omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2}\delta v_z \tag{36}$$

$$(35),(36) \implies (-\omega^2 + k_z^2 C_s^2)\delta v_z + \frac{B_{0\varphi}^2 k_z^2\omega^2}{4\pi\rho_0(\omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2)}\delta v_z = \left(-\omega^2 + k_z^2 C_s^2 + \frac{V_{A\varphi}^2 k_z^2\omega^2}{\omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2}\right)\delta v_z = 0$$

$$\implies \omega^4 - k_z^2\omega^2(C_s^2 + \underbrace{V_{Az}^2 + V_{A\phi}^2}_{V_A^2}) + k_z^4 V_{Az}^2 C_s^2 = 0 \tag{37}$$

よって φ, z 方向からは速い磁気音波と遅い磁気音波の分散関係式が得られる。

(ii) $\Omega \neq 0$ のとき (簡単のため、$B_{0\varphi} = 0$ とする)
r, φ 方向の分散関係式を求めてみよう。

$$(29) \implies \delta B_r = -\frac{k_z B_{0z}}{\omega} \delta v_r \tag{38}$$

$$(30),(38) \implies -i\omega \delta B_\varphi = -\frac{k_z B_{0z}}{\omega} \delta v_r \frac{d\Omega}{d\ln r} + ik_z B_{0z} \delta v_\varphi \implies \delta B_\varphi = \frac{k_z B_{0z}}{i\omega^2} \delta v_r \frac{d\Omega}{d\ln r} - \frac{k_z B_{0z}}{\omega} \delta v_\varphi \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
(26),(39) \quad &\implies \quad -i\omega \delta v_\varphi + \left(2\Omega + \frac{d\Omega}{d\ln r}\right) \delta v_r - i\frac{k_z B_{0z}}{4\pi\rho_0} \left(\frac{k_z B_{0z}}{i\omega^2} \delta v_r \frac{d\Omega}{d\ln r} - \frac{k_z B_{0z}}{\omega} \delta v_\varphi\right) = 0 \\
&\implies \quad \left(2\Omega + \frac{\omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2}{\omega^2} \frac{d\Omega}{d\ln r}\right) \delta v_r + i\frac{\omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2}{\omega} \delta v_\varphi = 0
\end{aligned} \tag{40}$$

$$(25),(38) \quad \implies \quad -i\omega \delta v_r - 2\Omega \delta v_\varphi + \frac{ik_z}{4\pi\rho_0} B_{0z} \frac{k_z B_{0z}}{\omega} \delta v_r = i\frac{k_z^2 V_{Az}^2 - \omega^2}{\omega} \delta v_r - 2\Omega \delta v_\varphi = 0 \tag{41}$$

$$\therefore (40),(41) \implies \begin{pmatrix} i\frac{k_z^2 V_{Az}^2 - \omega^2}{\omega} & -2\Omega \\ 2\Omega + \frac{\omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2}{\omega^2} \frac{d\Omega}{d\ln r} & i\frac{k_z^2 V_{Az}^2 - \omega^2}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_r \\ \delta v_\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{42}$$

任意の $\delta \mathbf{v} = (\delta v_r, \delta v_\varphi)$ でこの式が成り立つには、係数行列の行列式が 0 であればよい。

$$\begin{aligned}
&\det \begin{vmatrix} i\frac{k_z^2 V_{Az}^2 - \omega^2}{\omega} & -2\Omega \\ 2\Omega + \frac{\omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2}{\omega^2} \frac{d\Omega}{d\ln r} & i\frac{k_z^2 V_{Az}^2 - \omega^2}{\omega} \end{vmatrix} = -\frac{(k_z^2 V_{Az}^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\Omega^2 + \frac{\omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2}{\omega^2} \frac{d\Omega^2}{d\ln r} = 0 \\
&\implies \omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2 = \pm \sqrt{4\Omega^2 \omega^2 + (\omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2) \frac{d\Omega^2}{d\ln r}}
\end{aligned} \tag{43}$$

i) 剛体回転のとき
$d\Omega/dr = 0$ より

$$(43) \implies \omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2 = \pm \sqrt{4\Omega^2 \omega^2} \implies \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 = \left(\frac{k_z V_{Az}}{\Omega}\right)^2 \pm \sqrt{4\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2} \tag{44}$$

分散関係式は求まったが、ここでさらに

$$(42) \implies \frac{i\delta v_\varphi}{\delta v_r} = -\frac{2\Omega}{k_z^2 V_{Az}^2 - \omega^2} \omega \underbrace{=}_{(44)} \pm 1 \implies \delta v_\varphi = \mp i \delta v_r \tag{45}$$

としてみよう。すると

$$\delta \mathbf{v} = \delta v_r \mathbf{e}_r + \delta v_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \delta v_r (\mathbf{e}_r \mp i\mathbf{e}_\varphi) \tag{46}$$

となり、速い位相速度を持つ波は円盤と同じ回転方向に回る円偏波、遅い位相速度を持つ波は円盤の回転方向とは逆方向に回る円偏波と考えることができる。

剛体回転の場合、どちらも ω^2 は負になることがなく、不安定でないことがわかる。

ii) ケプラー回転のとき

$$\Omega^2 = \frac{GM}{r^3} \implies \frac{d\Omega^2}{dr} = -3\frac{GM}{r^4} = -3\Omega^2\frac{1}{r} \implies \frac{d\Omega^2}{d\ln r} = -3\Omega^2 \tag{47}$$

より

$$(43) \implies \omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2 = \pm\sqrt{4\Omega^2\omega^2 - 3\Omega^2(\omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2)} = \pm\sqrt{\Omega^2\omega^2 + 3\Omega^2 k_z^2 V_{Az}^2} \tag{48}$$

$0 < k_z < \sqrt{3}\Omega/V_{Az}$ では $\omega^2 < 0$ となり、これは不安定である。最大成長率は大体 $\nu_{\mathrm{MRI}} \simeq 0.75\Omega$ である。
iii) flat rotation のとき

$$\Omega^2 = \frac{v_0^2}{r^2} \implies \frac{d\Omega^2}{dr} = -2\frac{v_0^2}{r^3} = -2\frac{\Omega^2}{r} \implies \frac{d\Omega^2}{d\ln r} = -2\Omega^2 \tag{49}$$

より

$$(43) \implies \omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2 = \pm\sqrt{2\Omega^2\omega^2 + 2\Omega^2 k_z^2 V_{Az}^2} \implies \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 = \left(\frac{k_z V_{Az}}{\Omega}\right)^2 \pm \sqrt{2\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 + 2\left(\frac{k_z V_{Az}}{\Omega}\right)^2} \tag{50}$$

$0 < k_z < \sqrt{2}\Omega/V_{Az}$ では $\omega^2 < 0$ となり、これは不安定である。最大成長率は大体 $\nu_{\mathrm{MRI}} \simeq 0.5\Omega$ である。

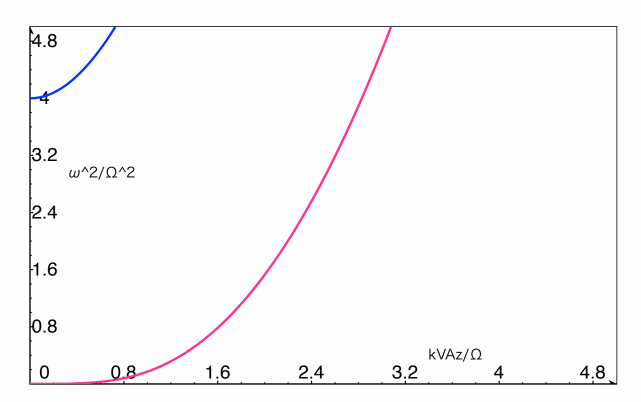

fig 1: 剛体回転のとき。

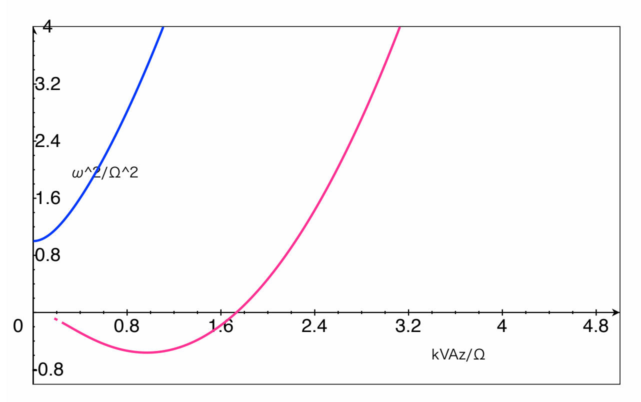

fig 2: ケプラー回転のとき。

先ほどの円偏波の話しに少し戻り、MRI の物理過程について触れておきたい。今は基底ベクトルに $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ を用いているので、これは円盤とともに回転している系から見たときの話しである。円盤の外にいる、回転していない系からこれを観察してみると、速い位相速度の円偏波は回転円盤よりも大きな角速度で回転するモードであり、遅い位相速度の円偏波は回転円盤よりも小さな角速度で回転するモードに対応している。安定点から摂動を加えられたときに、大きな角速度で回転しているモードでは、遠心力が大きいので、流体要素は遠心力を復元力とした早い周期のエピサイクリック運動を行うことができる。磁気張力による角運動量輸送のタイムスケールよりもエピサイクリック振動周期が短いので、磁力線はたなびかず、不安定とならない。一方、小さな角速度で回転しているモードは遠心力が弱いので流体要素のエピサイクリック振動周期が長くなり、エピサイクリック運動でもとの位置まで戻るよりさきに、磁気張力による角運動量輸送が行われてしまい、不安定となる。

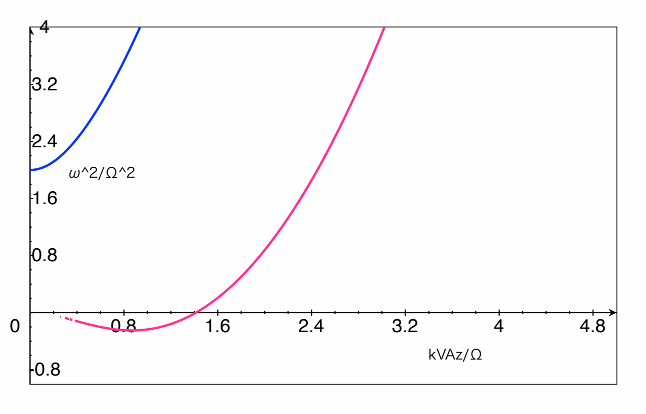

fig 3: 銀河円盤のような flat rotation のとき。

MRI, Balbus-Hawley mechanism(Lagrange 的理解)

実際に線形解析を行った結果では、安定なモードと不安定なモードの 2 種類が存在することがわかったが、ここでは定性的 (直観的) な見地からこの不安定性を理解しようと思う。

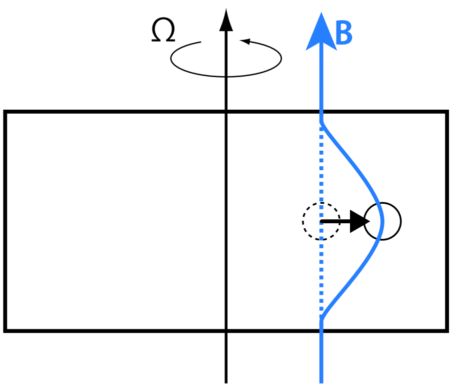

fig 4: 磁場を伴って回転するプラズマ円盤中の流体要素に摂動を加える。

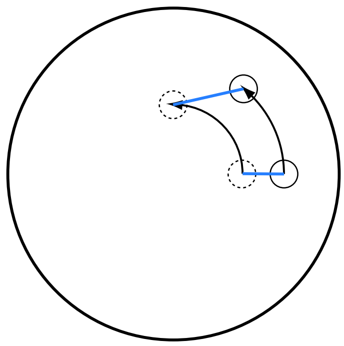

fig 5: 外側にズレることで回転に遅れが生じ、磁力線が伸びる。

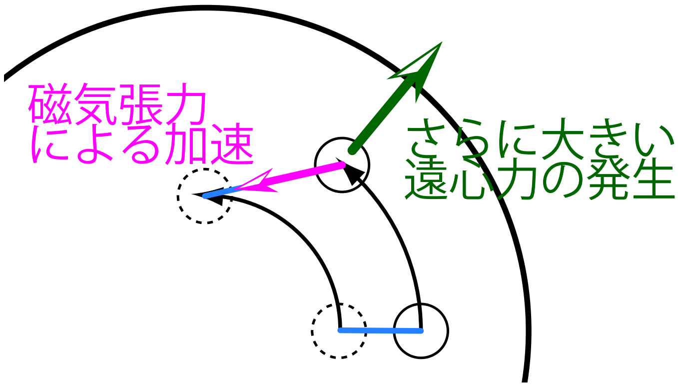

fig 6: 円盤を上から見た図。磁気張力による加速により、より大きな遠心力がはたらく。

ある重力場中で安定に差動回転プラズマ円盤があるとする (ただし $d\Omega/dr$)。そこに回転軸方向に磁場が加わったとしよう。そして磁力線が突き刺さった半径 r の円運動をしている流体要素に摂動を加える (fig4)。ここで加えた摂動は動径方向に小さく加えたものであり、角運動量は保存しているものとする。角運動量を保存したまま外側の $r + \Delta r$ に移動したので、その分だけ角速度は遅くなり、磁力線はより大きく変形し磁気張力が加わる (fig5)。すると磁気張力により回転方向の加速度がはたらくので、流体要素の角速度を再び大きくなり、もとの半径 r での角速度で運動しようとする。しかし、それでは半径 $r + \Delta r$ の位置での重力よりも遠心力が大きくなるので、より外側に追いやられる (fig6)。そしてその分、磁力線がさらに伸

ばされ、より大きな磁気張力がはたらく。このように、磁力線が存在することで角運動量輸送が起こる一連の過程が MRI(磁気回転不安定性) の本質である。
実際に簡単な計算から MRI が起こる条件を見積もってみよう。ここでの差動回転円盤は Kepler 回転を仮定する。先ほどと同様に磁場が円盤に対して垂直に貫いているとし、半径 r の円運動をしている流体要素を外側に Δr だけズラす。先ほども記述したが、外側にズレた流体要素はには回転方向の磁気張力により角速度を減少させること無く、回転を続けようとすることが原因となってこの不安定性は成長していく。しかし磁気張力は回転方向だけでなく、動径方向内側にもはたらくはずである。すなわち「磁気張力」が「遠心力と重力を合わせた力」よりも大きな復元力を持ってさえいれば、この不安定性は起こらないと考えることができる。よって半径 $r+\Delta r$ での動径方向の力の釣り合いについて考えよう。

$$(\text{重力}) = \frac{GM}{r^2} \;\rightarrow\; \frac{GM}{(r+\Delta r)^2} = \frac{GM}{r^2}\frac{1}{(1+\frac{\Delta r}{r})^2} \simeq \frac{GM}{r^2}\left(1 - 2\frac{\Delta r}{r}\right) \tag{51}$$

$$(\text{遠心力}) = r\Omega(r)^2 \;\rightarrow\; (r+\Delta r)\Omega(r)^2 \tag{52}$$

遠心力の部分に「回転方向にはたらく磁気張力による角速度を一定にしようとする効果」が入っている。また Kepler 回転より $\Omega(r) = \sqrt{GM/r^3}$ である。

$$\therefore\; -(\text{重力}) + (\text{遠心力}) = 2\frac{GM}{r^3}\Delta r + \Delta r\Omega(r)^2 = 3\Delta r\Omega(r)^2 \tag{53}$$

続いて動径方向にはたらく磁気張力を考えよう。fig7 のように、磁力線の変形を曲率半径 ξ の円で近似すると

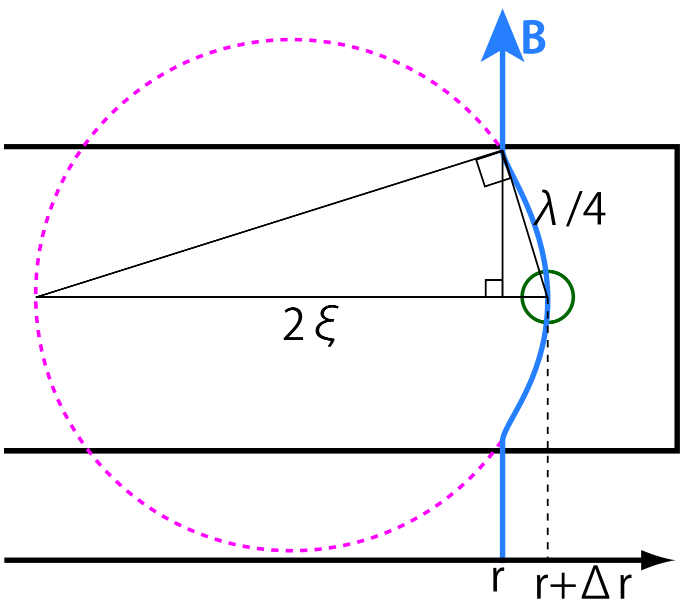

fig 7: 摂動が与えられたときの図。磁力線の変形を直径 2ξ の円の一部と考える。

$$(\text{磁気張力}) = \frac{1}{4\pi\rho}\frac{B^2}{\xi} = \frac{V_A^2}{\xi} \tag{54}$$

と書ける。fig7 にあるように三角形の相似の関係を用いると

$$2\xi : \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4} : \Delta r \implies \frac{\lambda^2}{16} = 2\xi\Delta r \implies \xi = \frac{\lambda^2}{32\Delta r} = \frac{\pi^2}{8\Delta r}\frac{1}{k^2} \tag{55}$$

$$(\text{磁気張力}) = \frac{8}{\pi^2}\Delta r k^2 V_A^2 \simeq \Delta r k^2 V_A^2 \tag{56}$$

(重力と遠心力の合力) > (動径方向にはたらく磁気張力) のとき不安定となるから、

$$3\Omega^2 > k^2 V_A^2 \implies 0 < k < \sqrt{3}\frac{\Omega}{V_A} \tag{57}$$

で不安定となる。これは (48) 式から求めた不安定条件と一致する。

MRI, Euler 的理解

簡単のため Kepler rotation disc で考える。分散関係式 (48) 式より

$$(43) \implies \omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2 = \pm\sqrt{\Omega^2\omega^2 + 3\Omega^2 k_z^2 V_{Az}^2} \implies \omega^4 - 2k_z^2 V_{Az}^2\omega^2 + k_z^4 V_{Az}^4 = \Omega^2\omega^2 + 3\Omega^2 k_z^2 V_{Az}^2$$

$$\implies \omega^4 - (2k_z^2 V_{Az}^2 + \Omega^2)\omega^2 + k_z^4 V_{Az}^4 - 3\Omega^2 k_z^2 V_{Az}^2 = 0$$

$$\implies \omega^2 = \frac{1}{2}\left\{2k_z^2 V_{Az}^2 + \Omega^2 \pm \sqrt{(2k_z^2 V_{Az}^2 + \Omega^2)^2 + 12\Omega^2 k_z^2 V_{Az}^2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{2k_z^2 V_{Az}^2 + \Omega^2 \pm \sqrt{4k_z^4 V_{Az}^4 + \Omega^4 + 16\Omega^2 k_z^2 V_{Az}^2}\right\}$$

$$\implies \frac{\omega^2}{\Omega^2} = \frac{1}{2}\left\{2\frac{k_z^2 V_{Az}^2}{\Omega^2} + 1 \pm \sqrt{4\frac{k_z^4 V_{Az}^4}{\Omega^4} + 1 + 16\frac{k_z^2 V_{Az}^2}{\Omega^2}}\right\} \tag{58}$$

$k_z^2 V_{Az}^2/\Omega^2 \ll 1$ の極限での分散関係と固有ベクトルを求めることで、波動としての MRI の理解を深めよう。

$$\frac{\omega^2}{\Omega^2} \simeq \frac{1}{2}\left\{2\frac{k_z^2 V_{Az}^2}{\Omega^2} + 1 \pm \left(1 + 8\frac{k_z^2 V_{Az}^2}{\Omega^2} - 32\frac{k_z^4 V_{Az}^4}{\Omega^4}\right)\right\} = 1 \ \text{or} \ -3\frac{k_z^2 V_{Az}^2}{\Omega^2} + 16\frac{k_z^4 V_{Az}^4}{\Omega^4} \tag{59}$$

(i). $\omega^2 = \Omega^2 > 0$ のとき

$$(42) \implies \begin{pmatrix} i\frac{k_z^2 V_{Az}^2 - \Omega^2}{\Omega} & -2\Omega \\ 2\Omega + \frac{\Omega^2 - k_z^2 V_{Az}^2}{\Omega^2}\frac{d\Omega}{d\ln r} & i\frac{k_z^2 V_{Az}^2 - \Omega^2}{\Omega} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta v_r \\ \delta v_\varphi \end{pmatrix} \underbrace{=}_{k_z^2 V_{Az}^2/\Omega^2 \ll 1} \begin{pmatrix} -i\Omega & -2\Omega \\ \frac{1}{2}\Omega & -i\Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta v_r \\ \delta v_\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\implies -i\Omega\delta v_r - 2\Omega\delta v_\varphi = 0 \implies \frac{i\delta v_r}{\delta v_\varphi} = -2 \tag{60}$$

今、$\omega = \Omega$ より、これは角振動数 Ω で安定に伝播していく楕円偏波であることがわかる。これは質点系で考えたときの角振動数 $\kappa = \Omega$ で安定軌道まわりを振動するエピサイクリック運動とも似ているところである。

(ii). $\omega^2 = -3k_z^2 V_{Az}^2 + 16k_z^4 V_{Az}^4/\Omega^2 < 0$ のとき

$$(42) \implies \begin{pmatrix} i\frac{k_z^2 V_{Az}^2 + 3k_z^2 V_{Az}^2 - 16\frac{k_z^4 V_{Az}^4}{\Omega^2}}{\sqrt{-3k_z^2 V_{Az}^2 + 16\frac{k_z^4 V_{Az}^4}{\Omega^2}}} & -2\Omega \\ 2\Omega + \frac{-3k_z^2 V_{Az}^2 + 16\frac{k_z^4 V_{Az}^4}{\Omega^2} - k_z^2 V_{Az}^2}{-3k_z^2 V_{Az}^2 + 16\frac{k_z^4 V_{Az}^4}{\Omega^2}}\left(-\frac{3}{2}\Omega\right) & i\frac{k_z^2 V_{Az}^2 + 3k_z^2 V_{Az}^2 - 16\frac{k_z^4 V_{Az}^4}{\Omega^2}}{\sqrt{-3k_z^2 V_{Az}^2 + 16\frac{k_z^4 V_{Az}^4}{\Omega^2}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta v_r \\ \delta v_\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{61}$$

$$(11\,成分) = (22\,成分) = i\frac{\Omega^2}{\Omega}\frac{4\frac{k_z^2V_{Az}^2}{\Omega^2} - 16\frac{k_z^4V_{Az}^4}{\Omega^4}}{\sqrt{-3\frac{k_z^2V_{Az}^2}{\Omega^2} + 16\frac{k_z^4V_{Az}^4}{\Omega^4}}} \simeq \frac{4}{\sqrt{3}}k_zV_{Az} \tag{62}$$

$$(21\,成分) = 2\Omega - \frac{3}{2}\Omega\frac{-4\frac{k_z^2V_{Az}^2}{\Omega^2} + 16\frac{k_z^4V_{Az}^4}{\Omega^4}}{-3\frac{k_z^2V_{Az}^2}{\Omega^2} + 16\frac{k_z^4V_{Az}^4}{\Omega^4}} = 2\Omega - \frac{3}{2}\Omega\frac{4-\delta}{3-\delta} \simeq 2\Omega - \frac{3}{2}\Omega\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{9}\delta\right) = -\frac{8}{3}\frac{k_z^2V_{Az}^2}{\Omega} \tag{63}$$

途中、$\delta \equiv 16k_z^2V_{Az}^2/\Omega^2$ とおいて Taylor 展開を行った。

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}}k_zV_{Az} & -2\Omega \\ -\frac{8}{3}\frac{k_z^2V_{Az}^2}{\Omega} & \frac{4}{\sqrt{3}}k_zV_{Az} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta v_r \\ \delta v_\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{0} \implies \frac{4}{\sqrt{3}}k_zV_{Az}\delta v_r - 2\Omega\delta v_\varphi = 0 \implies \frac{\delta v_r}{\delta v_\varphi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{k_zV_{Az}}{\Omega} \tag{64}$$

よってこれは直線偏波である。また $\omega^2 < 0$ なので、これは $\delta v_r/\delta v_\varphi$ の比を一定に保ちながら指数関数的に摂動の振幅が増加 or 減少していく、不安定な解であることを意味している。

Bibliography

[1] Balbus, A. S., & Hawley, J. F. 1991, ApJ, 376, 214

[2] 観山正見, 野本憲一, 二間瀬敏史, "天体物理学の基礎 II"

[3] 柴田一成, 福江純, 松元亮治, 嶺重慎, "活動する宇宙"