Shock Wave (presented by Sho Nakamura)

update:11/Jan/2012

Hydrodynamic Shocks (perpendicular)

衝撃波と同じ速度で運動する系で衝撃波を観測する。また衝撃波は定常・等速で伝播していくものとする。衝撃波面を挟んで上流 (pre-shock) 側の物理量には 1、下流 (post-shock) 側の物理量には 2 の添字をつけて考える。また簡単のため、流体は衝撃波面に対して垂直な方向にしか運動していないとする。
質量・運動量・エネルギー保存則より、衝撃波面を挟んで

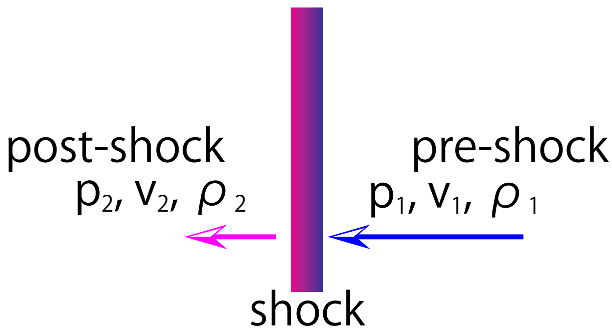

fig 1: 衝撃波に乗った系。

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \tag{1}$$

$$p_1 + \rho_1 v_1 \cdot v_1 = p_2 + \rho_2 v_2 \cdot v_2 \tag{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 e_1 + p_1\right) v_1 = \left(\frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \rho_2 e_2 + p_2\right) v_2 \tag{3}$$

が成り立つ。ここで

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \tag{4}$$

は単位体積あたりの内部エネルギーである。

$$(3),(4) \implies \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2} \tag{5}$$

ここで

$$(1) \implies \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} \equiv x,\ \ \frac{p_2}{p_1} \equiv y,\ \ C_{s1}^2 = \frac{\gamma p_1}{\rho_1},\ \ M_1 \equiv \frac{v_1}{C_{s1}} \tag{6}$$

などを定義しておき、あとはひたすら式変形を行う。

$$(2) \implies p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_1\frac{p_2}{p_1} + \rho_1 v_1^2 \frac{\rho_2 v_2^2}{\rho_1 v_1^2} = p_1 y + \rho_1 v_1^2 \frac{1}{x} \implies \frac{\rho_1 C_{s1}^2}{\gamma} + \rho_1 v_1^2 = \frac{\rho_1 C_{s1}^2}{\gamma} y + \rho_1 v_1^2 \frac{1}{x}$$

$$\implies \frac{1}{\gamma} + M_1^2 = \frac{y}{\gamma} + \frac{M_1^2}{x} \implies y = 1 + \gamma M_1^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \tag{7}$$

$$(5) \implies \frac{C_{s1}^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{1}{\gamma-1}\frac{\gamma p_1}{\rho_1}\frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{v_1^2}v_1^2 = \frac{C_{s1}^2}{\gamma-1}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}v_1^2$$

$$\implies \frac{1}{2}v_1^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{C_{s1}^2}{\gamma-1}\left(1 - \frac{y}{x}\right) = 0 \implies \frac{\gamma-1}{2}M_1^2(x^2-1) + (x^2 - xy) = 0$$

$$\Longrightarrow \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)x^2 - yx - \frac{\gamma-1}{2}M_1^2 = 0$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{(7)} \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)x^2 - \left\{1+\gamma M_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}x - \frac{\gamma-1}{2}M_1^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \left\{2+(\gamma-1)M_1^2\right\}x^2 - 2x + 2\gamma M_1^2(x-1) - (\gamma-1)M_1^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \left\{2+(\gamma-1)M_1^2\right\}x^2 - 2(1+\gamma M_1^2)x + (\gamma+1)M_1^2 = 0 \tag{8}$$

x の定義を思い返すと、これは衝撃波面を挟んで上流側と下流側の密度比であった。今は定常的に衝撃波面を挟んだ場合について考えているが、この式は衝撃波面の有る無しに関わらず定常状態の流体について成り立つ式である。つまり上式には衝撃波面が存在しない、$x=1$ も解として含まれている。実際に因数分解してやれば

$$(x-1)[\{2+(\gamma-1)M_1^2\}x - (\gamma+1)M_1^2] = 0 \tag{9}$$

$$\therefore\ x = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2},\ \ y = \frac{p_2}{p_1} = 1+\gamma M_1^2\left(1-\frac{1}{\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}}\right) = \frac{2\gamma M_1^2-\gamma+1}{\gamma+1} \tag{10}$$

(10) 式を見ればわかる通り、$M_1=1$ のとき物理量 ρ, v, p に不連続は生じないことがわかる。よって衝撃波は $M_1>1$ のときに発生することがわかる。さらに $M_1\to\infty$ の極限では

$$x = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1},\ \ y\to\infty \tag{11}$$

のように、密度・速度は有限の値になることがわかる。

衝撃波によるエントロピー変化と下流側での流体の速度

衝撃波の前後で密度、速度、圧力以外の物理量はどうなっているかを調べてみよう。単位体積あたりのエントロピーを s とすると

$$s = C_v\ln\frac{p}{\rho^\gamma} \ \Longrightarrow\ s_2-s_1 = C_v\ln\left\{\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma\right\} = C_v\ln\frac{p_2}{p_1} - \gamma C_v\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{12}$$

両辺を M_1 で微分すると $p_1, \rho_1, s_1 = \mathrm{const}$ より

$$\frac{ds_2}{dM_1} = C_v\frac{d}{dM_1}\ln p_2 - \gamma C_v\frac{d}{dM_1}\ln\rho_2 = C_v\frac{1}{p_2}\frac{dp_2}{dM_1} - \gamma C_v\frac{1}{\rho_2}\frac{d\rho_2}{dM_1} \tag{13}$$

(10) 式より

$$\frac{dp_2}{dM_1} = \frac{4\gamma}{\gamma+1}M_1p_1 \tag{14}$$

$$\frac{d\rho_2}{dM_1} = \frac{2(\gamma+1)M_1\{2+(\gamma-1)M_1^2\} - (\gamma+1)M_1^2\cdot 2(\gamma-1)M_1}{\{2+(\gamma-1)M_1^2\}^2}\rho_1 = \frac{4(\gamma+1)M_1}{\{2+(\gamma-1)M_1^2\}^2}\rho_1 \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \frac{ds_2}{dM_1} &= C_v \frac{p_1}{p_2}\frac{4\gamma}{\gamma+1}M_1 - \gamma C_v \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{4(\gamma+1)M_1}{\{2+(\gamma-1)M_1^2\}^2} \underbrace{=}_{(10)} C_v \frac{4\gamma}{2\gamma M_1^2-\gamma+1}M_1 - \gamma C_v \frac{1}{M_1}\frac{4}{2+(\gamma-1)M_1^2} \\
&= 4\gamma C_v \frac{M_1^2\{2+(\gamma-1)M_1^2\}-\{2\gamma M_1^2-\gamma+1\}}{M_1\{2\gamma M_1^2-\gamma+1\}\{2+(\gamma-1)M_1^2\}} = 4\gamma C_v \frac{(\gamma-1)(M_1^4-2M_1^2+1)}{M_1\{2\gamma M_1^2-\gamma+1\}\{2+(\gamma-1)M_1^2\}} \\
&= 4\gamma C_v \frac{(\gamma-1)(M_1^2-1)^2}{M_1\{2\gamma M_1^2-\gamma+1\}\{2+(\gamma-1)M_1^2\}} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

(10) 式の p_2/p_1 より $2\gamma M_1^2-\gamma+1>0$、よって $ds_2/dM_1>0$ である。衝撃波でないとき、すなわち $M_1=1$ のとき上流側と下流側で物理量は全て同じであるはずだから $s_2=s_1$、よって衝撃波が発生している $M_1>1$ のときには常に $s_2>s_1$ が成立する。逆に言えば先ほども書いたように、$M_1>1$ が衝撃波の発生条件と考えることができる。
次は post-shock 側の流体の速度について考えよう。

$$
\begin{aligned}
M_2^2 &= \frac{v_2^2}{C_{s2}^2} = \frac{\rho_2}{\gamma p_2}v_2^2 = \frac{\rho_1}{\gamma p_1}\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{p_1}{p_2}\frac{v_2^2}{v_1^2}v_1^2 = \frac{v_1^2}{C_{s1}^2}\frac{1}{xy} \underbrace{=}_{(10)} M_1^2 \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2}\frac{\gamma+1}{2\gamma M_1^2-\gamma+1} \\
&= \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2-\gamma+1} \implies M_2^2-1 = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2-(2\gamma M_1^2-\gamma+1)}{2\gamma M_1^2-\gamma+1} = \frac{-\gamma M_1^2-M_1^2+\gamma+1}{2\gamma M_1^2-2\gamma+\gamma+1} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore M_2^2-1 = -\frac{M_1^2-1}{\frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2-1)+1} \qquad (18)
$$

衝撃波が発生しているとき $M_1>1$、よって必ず $M_2^2-1<0$ となり、post-shock 側は亜音速となる。

等温衝撃波

実際の星間空間では、衝撃波で加熱された星間ガスは放射によりエネルギーを失い、冷却される。冷却時間が着目している物理現象のタイムスケールよりも十分短い場合には一度衝撃波により加熱されたとしても、すぐに冷却し、結果として衝撃波の前後で温度は変化しないとみなすことができる。これを等温衝撃波と呼ぶ。等温衝撃波の場合に置ける jump condition を求めてみよう。
質量保存 (1)、運動量保存 (2)、はそのままだが、唯一代わり映えするのはエネルギー保存の式である。等温条件より

$$
\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k_B}{\mu m_p}T = C_s^2 \qquad (19)
$$

$$
(1) \implies \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} \equiv x \qquad (20)
$$

$$
\begin{aligned}
&(2) \implies \rho_1\left(\frac{p_1}{\rho_1}+v_1^2\right) = \rho_2\left(\frac{p_2}{\rho_2}+v_2^2\right) \underbrace{\implies}_{(19)} C_s^2+v_1^2 = x(C_s^2+v_2^2) \\
&\implies (1-x)C_s^2 = xv_2^2-v_1^2 = v_1^2\left(x\frac{v_2^2}{v_1^2}-1\right) = v_1^2\left(\frac{1}{x}-1\right) \implies x(1-x) = M_1^2(1-x) \\
&\implies (1-x)(x-M_1^2) = 0 \qquad (21)
\end{aligned}
$$

$x=1$ は衝撃波ではない。よって求める解は

$$
x = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = M_1^2 \qquad (22)
$$

となり、圧縮率はマッハ数の 2 乗に比例する。