物 理（１）

ポテンシャル U が座標原点からの距離 r のみに依存する中心力場において、質量 m の粒子がどのような運動をするかを考える。粒子の位置ベクトルと運動量ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}$ と $\mathbf{p}$ とする。

問 1. このような中心力場における粒子の運動では、場の中心についての角運動量 $\mathbf{J} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ は保存することを示せ。さらに、粒子の運動はある平面 (軌道面) に沿って行なわれることを示せ。

問 2. この平面に平面極座標 (r, θ) を導入して、ラグランジアン L を書け。

問 3. 粒子の運動方程式を (r, θ) 方向に対して書け。

問 4. 粒子が円運動を行なう場合の半径 r_c を求めよ。

問 5. ポテンシャルが $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$ $(k > 0)$ と与えられ、そのような場における円運動の角速度を $\omega_\theta \equiv d\theta/dt$ とする。今、粒子の運動が円運動からわずかにずれているときの、r 方向の微小振動の振動数を ω_θ を用いて表せ。

物 理（2）

互いに独立で相互作用のない N 個の磁石 (磁気モーメント μ_m) の系が、一様な磁場 H の中で温度 T の熱平衡にあるものとする。磁石は磁場に対して平行か反平行の二つの状態だけをとるものとし、磁石の数 N は十分大きいとする。このとき以下の問いに答えよ。

問 1. 独立な系の状態和 (分配関数) を $Z = \sum_j e^{-\beta E_j}$ で与えるとき、系のエネルギーの平均値 $\langle E \rangle$ とゆらぎ $\left\langle (E - \langle E \rangle)^2 \right\rangle$ が

$$\langle E \rangle = -\partial \ln Z / \partial \beta, \qquad \left\langle (E - \langle E \rangle)^2 \right\rangle = \partial^2 \ln Z / \partial \beta^2$$

で与えられることを示せ。ここで、E_j は状態 j にある系のエネルギーであり、 $\beta = 1/kT$、そして k はボルツマン定数である。

問 2. 磁場中の N 個の独立な磁石の系の状態和 Z_N を求めよ。

問 3. 状態和 Z_N を用いて系のエネルギーの平均値 $\langle E \rangle$ とゆらぎ $\left\langle (E - \langle E \rangle)^2 \right\rangle$ を $\beta \mu_m H \ll 1$ なる条件のもとで計算せよ。

問 4. 磁気モーメント μ_m が磁場に平行な磁石の数を N_+、反平行な磁石の数を N_-、その差を $n = N_+ - N_-$ とするとき、系のエネルギーは $E_n = -n\mu_m H$ で与えられる。このエネルギー状態 E_n の縮退度 $W_N(n)$ を N と n を用いて表せ。

問 5. $\ln W_N(n)$ を、その最大値を与える $n = n_0$ の近傍で

$$\ln W_N(n) \cong \ln W_N(n_0) + b(n - n_0)^2$$

と展開する。このときの n_0 と b を求めよ。ここで、$x \gg 1$ のとき $d \ln x!/dx \sim \ln x$ なる近似が使えるものとする。

問 6. $W_N(n)$ とボルツマン因子 $e^{-\beta E_n}$ を使って、$\int_{-\infty}^{\infty} f(n)dn = 1$ と規格化された n の分布関数 $f(n)$ を求めよ。その分布関数 $f(n)$ を用いて $\langle E \rangle$ と $\left\langle (E - \langle E \rangle)^2 \right\rangle$ を計算せよ。ここで、$\beta \mu_m H \ll 1$ を仮定し、n は $-\infty < n < \infty$ なる連続変数と考えてよいとする。

物 理（3）

問 1. 磁場 $\vec{B}$ は、ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を用いて以下のように表せる。

$$\vec{B} \quad = \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

電磁場の時間変化が無視できるとき、ベクトルポテンシャルの満たす方程式を Maxwell 方程式から導け。但し、電流密度を $\vec{j}$ とし、div $\vec{A} = 0$ を満たすゲージを選択せよ。

問 2. 図のように太さの無視できる半径 a の円形の導線に電流 I が流れている。

(a) 円電流が作る y-z 面内の磁力線の概略を図示せよ。磁場の方向も描くこと。

この電流が任意の点 $\vec{r}$ に作るベクトルポテンシャル $\vec{A}$ は以下の様に書ける。

$$\vec{A}(\vec{r}) \quad = \quad \oint \frac{Id\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|}$$

ここで $\oint$ は、電流の流れる経路に沿った積分である。以下では、十分遠方にいるの点 $\vec{r}$ にいる観測者を考え $|\vec{r}| \gg a$ とする。

(b) $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|}$ を微小量の一次まで展開せよ。

(c) 電流 I が作る $\vec{A}$ の x, y, z 成分を微小量 $a/|\vec{r}|$ の一次まで展開した形で求めよ。

(d) 電流 I が作る磁場 $\vec{B}$ の各成分を微小量 $a/|\vec{r}|$ の一次まで展開した形で求めよ。

(e) 図の系に対して x 軸の正の方向に一定の速度 v で動いている K' 系を考える。K' 系の電場ベクトル $\vec{E}'$ の各成分を求めよ。但し、v は光速よりずっと小さく相対論的効果は無視できるとせよ。

(f) K' 系の y'-z' 面内での電気力線の様子を電場の向きも含めて図示せよ。

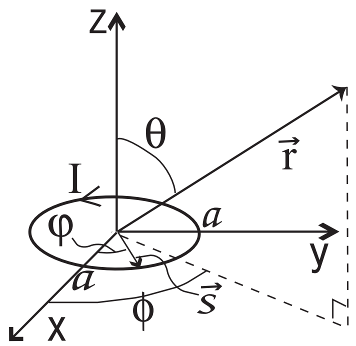

図:円電流 I。電流は円形の導線を矢印の方向に流れる。

必要なら以下の Maxwell 方程式を参照せよ

MKSA 単位系:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \frac{1}{\mu_0}\text{rot } \vec{B} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

cgs Guass 単位系:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \text{div}\vec{B} = 0$$

物 理（4）

問 1. 次の交換関係を満たす角運動量演算子 $J_1,\ J_2,\ J_3$ を考える。

$$[J_1, J_2] = i\hbar J_3,\ [J_2, J_3] = i\hbar J_1,\ [J_3, J_1] = i\hbar J_2$$

以下の問に答えよ。

(a) $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ が各 $J_i (i = 1, 2, 3)$ と交換することを示せ。

(b) $J_+ = J_1 + iJ_2,\ J_- = J_1 - iJ_2$ とおくとき、それらの間の交換関係および J_3 との交換関係を求めよ。

(c) 以下、J_3 を対角化する表示をとる。$J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2$ と書けることを用いて、J^2 の固有値が決まっている状態で J_3 の固有値には上限、下限があることを示せ。

(d) J_3 の固有値の最大のものを j とするとき、J^2 の固有値は $j(j+1)$ であることを示せ。

問 2. z 方向の一様な磁場 $B = (0, 0, B)$ の中にある電子 (質量 m、電荷 $-e$) に対するハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + (p_y + eBx)^2 + p_z^2\right]$$

と書ける。このとき以下の問に答えよ。

(a) 古典的には電子はどのような運動をするか。

(b) 量子力学的にはどのような運動が予想されるか。

(c) $X = (p_y + eBx)/eB$ とおいて、この運動を調和振動子の場合と比べることによって、エネルギー順位を求めよ。ただし次のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2m}\omega^2 x^2$$

をもつ調和振動子のエネルギー順位は次のように与えられる。

$$E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$