東北大天文学専攻H17年、物理問題[4]

update: 2017 Aug. 01, author: Sho K. NAKAMURA

[1] 角運動量演算子

角運動量演算子は次の関係を満たす。

$$[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \ (i, j, k = 1, 2, 3) \tag{1}$$

ここで ϵ_{ijk} はレヴィチヴィタ記号である。

(a)

交換関係の公式より

$$\begin{aligned} [J^2, J_i] &= [J_jJ_j, J_i] = [J_j, J_i]J_j + J_j[J_j, J_i] = i\hbar(-\epsilon_{ijk}J_kJ_j - J_j\epsilon_{ijk}J_k) = -i\hbar(\epsilon_{ikj}J_kJ_j - \epsilon_{ijk}J_jJ_k) \\ &= -i\hbar(\epsilon_{ijk}J_jJ_k - \epsilon_{ijk}J_jJ_k) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

よって $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ は各 J_i と交換関係が成立する。

(b)

$J_\pm = J_1 \pm iJ_2$ において

$$[J_+, J_-] = [J_1 + iJ_2, J_1 - iJ_2] = [J_1, J_1] - i[J_1, J_2] + i[J_2, J_1] + [J_2, J_2] = \hbar J_3 + i(-i\hbar J_3) = 2\hbar J_3 \tag{3}$$

$$[J_\pm, J_3] = [J_1 \pm iJ_2, J_3] = [J_1, J_3] \pm i[J_2, J_3] = -i\hbar J_2 \pm i \cdot i\hbar J_1 = -i\hbar J_2 \mp \hbar J_1 = \mp\hbar(J_1 \pm iJ_2) = \mp\hbar J_\pm \tag{4}$$

という交換関係がそれぞれ成立する。

(c)

以下、J_3 の体格か表示として

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_+J_-) + J_3^2 \tag{5}$$

と書く。

$$J^2|\psi >= \hbar^2 M|\psi >, \ J_3|\psi >= \hbar\ell|\psi >, \tag{6}$$

のようにそれぞれ固有値を取ると仮定する。ただし波動関数は $< \psi|\psi >= 1$ を満たす。

$$< \psi|J^2|\psi >= \hbar^2 M < \psi|\psi >= \hbar^2 M \tag{7}$$

となる。一方で

$$< \psi|J^2|\psi >=< J^\dagger\psi|J\psi > \tag{8}$$

とも書ける。$J^\dagger$ は角運動量演算子で実体を持つものであるから、$J^\dagger = J$ が成り立つ。

$$< \psi|J^2|\psi >=< J\psi|J\psi >\geq 0 \implies M \geq 0 \tag{9}$$

一方で

$$< \psi|J^2|\psi >= \frac{1}{2} < \psi|J_+J_-|\psi > + \frac{1}{2} < \psi|J_-J_+|\psi > + < \psi|J_3^2|\psi > \tag{10}$$

$$J_\pm^\dagger = (J_1 \pm iJ_2)^\dagger = J_1^\dagger \mp iJ_2^\dagger = J_1 \mp iJ_2 = J_\mp \tag{11}$$

より

$$< \psi|J^2|\psi >= \frac{1}{2} < J_-\psi|J_-\psi > + \frac{1}{2} < J_+\psi|J_+\psi > + < \psi|J_3^2|\psi >= \frac{1}{2} < J_-\psi|J_-\psi > + \frac{1}{2} < J_+\psi|J_+\psi > + \hbar^2\ell^2 \geq \hbar^2\ell^2 \tag{12}$$

より

$$\hbar^2 M \geq \hbar^2\ell^2 \implies -\sqrt{M} \leq \ell \leq \sqrt{M} \tag{13}$$

よって、J_3 の固有値 ℓ は上限と下限を持つ。

(d) 交換関係式より

$$J_3J_\pm|\psi >= J_\pm J_3|\psi > \pm\hbar J_\pm|\psi >= \hbar(\ell \pm 1)J_\pm|\psi > \tag{14}$$

$|\psi >$ が J_3 の固有状態であるとき、$J_\pm|\psi >, J_\pm^2|\psi >, \cdots$ も J_3 の固有状態であり、その固有値は $\hbar(\ell \pm 1), \hbar(\ell \pm 2), \cdots$ となることがわかる。
J_3 の固有状態の中で、固有値が最大値 $\hbar j$ の状態を $|\psi_{\mathrm{max}} >$ とすると

$$J_3|\psi_{\mathrm{max}} >= \hbar j|\psi_{\mathrm{max}} > \tag{15}$$

$$J_+|\psi_{\mathrm{max}} >= 0 \tag{16}$$

より

$$\begin{aligned} J^2|\psi_{\mathrm{max}} > &= \left\{\frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2\right\}|\psi_{\mathrm{max}} >= \left\{\frac{1}{2}(J_-J_+ + 2\hbar J_3 + J_-J_+) + J_3^2\right\}|\psi_{\mathrm{max}} >= \hbar^2 j + \hbar j^2|\psi_{\mathrm{max}} > \\ &= \hbar^2 j(j+1)|\psi_{\mathrm{max}} > \end{aligned} \tag{17}$$

よって、固有値が $j(j+1)$ となることがわかる。

[2] 一様磁場中の電子

(a)
古典的には磁場の周りを螺旋運動を行う。xy 方向には反時計回りに円運動をし、z 方向には等速度運動をする。

(b)
z 方向には何の影響もないので、自由粒子 (すなわち平面波) として振舞う。xy 面内ではエネルギー準位が離散化し、そのエネルギーに対応した半径の場所で確率密度がピークを持つような運動が予想される。

(c)

$$[X, p_x] = \frac{1}{eB}[p_y, p_x] + [x, p_x] = i\hbar \tag{18}$$

より、$p_x = p_X$ と考えてよい。

$$H = \frac{1}{2m}(p_X^2 + e^2B^2X^2 + p_z^2) \tag{19}$$

$H_X \equiv (p_X^2 + e^2B^2X^2)/2m, H_z \equiv p_z^2/2m$ とおくと、$H = H_X + H_z$ とかける。よって波動関数を $\psi = \varphi_X(X)\varphi_z(z)$ のように変数分離して書くことができる。

$$H\psi = \varphi_z H_X \varphi_X + \varphi_X H_z \varphi_z \tag{20}$$

ここで $\omega_c \equiv eB$ とおくと

$$H_X = \frac{1}{2m}p_X^2 + \frac{1}{2m}\omega_c^2 X^2 \tag{21}$$

これは調和振動子のハミルトニアンと同じ形である。

$$H_z = \frac{1}{2m}p_z^2 \tag{22}$$

は自由粒子のハミルトニアンである。

$$\therefore\ H_X\varphi_X = \hbar\omega_c(n+1/2)\varphi_X,\ H_z\varphi_z = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\varphi_z \tag{23}$$

よってこの運動のエネルギー順位は $E = \hbar\omega_c(n+1/2) + \hbar^2k_z^2/2m$ である。