東北大天文学専攻H17年、物理問題[3]

update: 2017 Aug. 04, author: Sho K. NAKAMURA

[1] ベクトルポテンシャル

電磁場の時間変化無視よりアンペール・マクスウェルの法則式は

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{1}$$

これの左辺に

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2}$$

を代入すると

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= (\epsilon_{ijk}\partial_j \epsilon_{k\ell m}\partial_\ell A_m)\mathbf{e}_i = \partial_j\partial_\ell(\epsilon_{kij}\epsilon_{k\ell m})A_m\mathbf{e}_i = \partial_j\partial_\ell(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell})A_m\mathbf{e}_i = (\partial_j\partial_i A_j - \partial_j\partial_j A_i)\mathbf{e}_i \\ &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} \end{aligned} \tag{3}$$

今、$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ のゲージを選択しているので、

$$-\Delta\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{4}$$

これがベクトルポテンシャルの満たす方程式である。

[2] 円電流が作る磁場

(a)

円電流を垂直に通る中心軸では磁力線は対称性より一直線、そして電流が作る磁場の方向は右ネジの法則から考えれば、以下のように描ける。

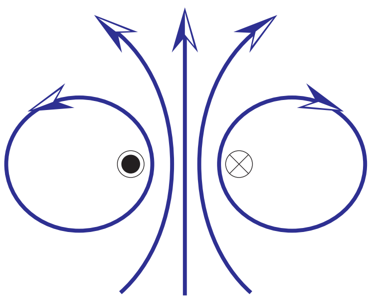

fig 1: 磁力線

(b)

座標系から

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{s} = a \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \implies d\mathbf{s} = ad\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

のように書けるので、

$$\mathbf{r} - \mathbf{s} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi - a\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\phi - a\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \implies |\mathbf{r} - \mathbf{s}| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos(\phi - \varphi)} = r\sqrt{1 + (a/r)^2 - 2(a/r)\sin\theta\cos(\phi - \varphi)} \tag{7}$$

$x \ll 1$ のとき、$(1 + x^2 - 2xC)^{-1/2} \simeq 1 + Cx$ と近似できる。よって $a/r \ll 1$ のとき

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} = \frac{1}{r}\left\{1 + \sin\theta\cos(\phi - \varphi)\frac{a}{r}\right\} \tag{8}$$

(c)

$$\mathbf{A} = Ia\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\sin\theta\cos\phi\cos\varphi + \frac{a}{r}\sin\theta\sin\phi\sin\varphi\right) \tag{9}$$

先に面倒な積分のみを列挙する。

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0,\ \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0,\ \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = 0 \tag{10}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} = \pi,\ \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} = \pi \tag{11}$$

$$\therefore\ \mathbf{A} = \frac{Ia\pi}{r}\frac{a}{r}\sin\theta \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{Ia^2\pi}{r^3} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

(d)

$$\partial_i \frac{r_k}{(r_j r_j)^{3/2}} = \frac{\delta_{ik}(r_j r_j)^{3/2} - r_k \frac{3}{2}(r_j r_j)^{1/2} 2 r_j \delta_{ij}}{(r_j r_j)^3} = \frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3 r_k r_i}{r^5} \tag{13}$$

よって

$$B_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z} = -Ia^2\pi \frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^3} = 3Ia^2\pi \frac{xz}{r^5} \tag{14}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} = -Ia^2\pi \frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{r^3} = 3Ia^2\pi \frac{yz}{r^5} \tag{15}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = Ia^2\pi \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3}\right) = Ia^2\pi \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right) = Ia^2\pi \left(\frac{2}{r^3} - \frac{3x^2+3y^2}{r^5}\right) \tag{16}$$

(e)

K' 系での見かけの電場 $\mathbf{E}' = \mathbf{v}/c \times \mathbf{B} = v/c(B_y \mathbf{e}_z - B_z \mathbf{e}_y)$ より

$$\mathbf{E}' = \frac{Ia^2\pi v}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3x^2+3y^2}{r^5} - \frac{2}{r^3} \\ \frac{3yz}{r^5} \end{pmatrix} \tag{17}$$

(f)

(a) で描いた磁力を、$z = y$ で線対称にしたものを描けばよい。

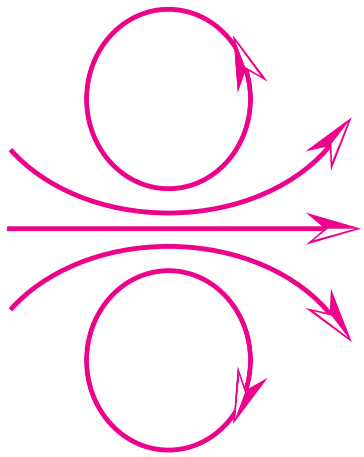

fig 2: 電気力線