東北大天文学専攻H17年、物理問題[2]

update: 2017 Aug. 05, author: Sho K. NAKAMURA

[1] エネルギー平均値、ゆらぎの算出

分配関数が $Z=\sum e^{-\beta E_j}$ で与えられるとき、エネルギーが E_j である確率は

$$P_j=\frac{1}{Z}e^{-\beta E_j} \tag{1}$$

$$\langle E\rangle=\sum_j E_jP_j=\frac{1}{Z}\sum_j E_je^{-\beta E_j}=-\frac{1}{Z}\sum_j\frac{\partial}{\partial\beta}e^{-\beta E_j}=-\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_j e^{-\beta E_j}=-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \tag{2}$$

ゆらぎは $\left\langle(E-\langle E\rangle)^2\right\rangle=\left\langle E^2\right\rangle-\langle E\rangle^2$ と書ける。

$$\left\langle E^2\right\rangle=\sum_j E_j^2P_j=\frac{1}{Z}\sum_j E_j^2e^{-\beta E_j}=\frac{1}{Z}\sum_j\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}e^{-\beta E_j}=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\sum_j e^{-\beta E_j}=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2} \tag{3}$$

より

$$\therefore\ \left\langle(E-\langle E\rangle)^2\right\rangle=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}-\frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2=\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right\}=\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln Z \tag{4}$$

[2] 磁気モーメント N 個の系の状態和

一様な磁場 H と平行な向きのとき $E_-=-\mu_mH$、反平行な向きのとき $E_+=\mu_mH$ のエネルギー状態である。よって 1 粒子状態和は

$$z_1=\sum_j e^{-\beta E_j}=e^{\beta\mu_mH}+e^{-\beta\mu_mH}=2\cosh(\beta\mu_mH) \tag{5}$$

ゆえに N 粒子状態和は

$$Z_N=\prod_{j=1}^{N}z_j=(z_1)^N=2^N\cosh^N(\beta\mu_mH) \tag{6}$$

[3] 磁気モーメント N 個の系のエネルギー平均値、ゆらぎ計算

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\ln\left\{2^N\cosh^N(\beta\mu_mH)\right\}\right]=-\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\ln(2^N)+\ln\left\{\cosh^N(\beta\mu_mH)\right\}\right]=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\{\cosh(\beta\mu_mH)\}\\ &= -N\mu_mH\tanh(\beta\mu_mH)\underbrace{\simeq}_{\beta\mu_mH\ll1}-N\beta\mu_m^2H^2\end{aligned} \tag{7}$$

$$\langle (E - \langle E\rangle)^2 \rangle = N\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\ln\{\cosh(\beta\mu_m H)\} = N\mu_m H\frac{\partial}{\partial\beta}\tanh(\beta\mu_m H) = \frac{N\mu_m^2 H^2}{\cosh^2(\beta\mu_m H)} \underbrace{\simeq}_{\beta\mu_m H\ll 1} N\mu_m^2 H^2 \tag{8}$$

[4] 縮退度

問題設定より $N_+ = (N+n)/2, N_- = (N-n)/2$ と書けるので

$$W_N(n) = {}_N C_{N_+} = \frac{N!}{N_+!(N-N_+)!} = \frac{N!}{\left(\frac{1}{2}(N+n)\right)!\left(\frac{1}{2}(N-n)\right)!} \tag{9}$$

[5] $\ln W_N$ の最大値とその近傍での展開

n の定義より、組み合わせ $W_N(n)$ が最大となるのは、$N_+ = N_-$ のとき。すなわち $n = n_0 = 0$ のときである。

$$\therefore\ \ln W_N(n) \simeq \ln W_N(n_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dn^2}\ln W_N(n)\bigg|_{n_0}(n-n_0)^2 \tag{10}$$

$$\frac{d}{dn}\ln W_N(n) = \frac{d}{dn}\left[-\ln\left\{\frac{1}{2}(N+n)\right\}! - \ln\left\{\frac{1}{2}(N-n)\right\}!\right] \tag{11}$$

近似式 $d\ln x!/dx \simeq \ln x$ より

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dn}\ln W_N(n) \simeq -\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1}{2}(N+n)\right\} + \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1}{2}(N-n)\right\}\\ &\Longrightarrow \frac{d^2}{dn^2}\left[-\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1}{2}(N+n)\right\} + \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{1}{2}(N-n)\right\}\right] = -\frac{1}{2}\frac{2}{N+n}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2}{N-n}\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+n} + \frac{1}{N-n}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

よって、$(n-n_0)^2$ の係数は

$$b = -\frac{1}{2N} \tag{13}$$

である。

[6] エントロピーから求める分布関数、エネルギー平均値、ゆらぎ

系が $[n, n+dn]$ の状態にある確率は

$$f(n)dn = CW_N(n)e^{-\beta E_n}dn \tag{14}$$

と表現できる。ここで C は規格化定数である。前問の答えより

$$\ln W_N \simeq \ln W_N(0) - \frac{1}{2N}n^2 = \ln W_N(0)e^{-n^2/2N} \implies W_N = W_N(0)e^{-n^2/2N} \tag{15}$$

系のエネルギー $E_n = -n\mu_m H$ より

$$f(n)dn = CW_N(0)e^{-\frac{n^2}{2N}}e^{\beta n\mu_m H}dn = C_1 e^{-\frac{n^2}{2N}+\beta n\mu_m H}dn = C_1 e^{-\frac{1}{2N}(n-N\beta\mu_m H)^2}e^{\frac{N^2\beta^2\mu_m^2 H^2}{2N}} = C_2 e^{-\frac{1}{2N}(n-N\beta\mu_m H)^2} \tag{16}$$

規格化定数を求めるためにガウス積分を用いる。

$$C_2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2N}(n-N\beta\mu_m H)^2} = C_2\sqrt{\frac{\pi}{1/(2N)}} = \sqrt{2N\pi}C_2 = 1 \implies C_2 = \frac{1}{\sqrt{2N\pi}} \tag{17}$$

$$\therefore\ f(n) = \frac{1}{\sqrt{2N\pi}}e^{-\frac{1}{2N}(n-N\beta\mu_m H)^2} \tag{18}$$

この分布関数より

$$\langle E\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} E_n f(n)dn = \frac{-\mu_m H}{\sqrt{2N\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ne^{-\frac{1}{2N}(n-N\beta\mu_m H)^2}dn \tag{19}$$

$n - N\beta\mu_m H = x$ とおくと

$$\langle E\rangle = \frac{-\mu_m H}{\sqrt{2N\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x+N\beta\mu_m H)e^{-\frac{x^2}{2N}}dx = \frac{-\mu_m H}{\sqrt{2N\pi}}N\beta\mu_m H\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2N}}dx = \frac{-\mu_m H}{\sqrt{2N\pi}}N\beta\mu_m H\sqrt{\frac{\pi}{1/(2N)}} = -N\beta\mu_m^2 H^2 \tag{20}$$

となり、これは分配関数から求めた結果と一致する。

$$\langle E^2\rangle = \frac{\mu_m^2 H^2}{\sqrt{2N\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} n^2 e^{-\frac{1}{2N}(n-N\beta\mu_m H)^2}dn \tag{21}$$

同様に $n - N\beta\mu_m H = x$ とおくと

$$\begin{aligned}\langle E^2\rangle &= \frac{\mu_m^2 H^2}{\sqrt{2N\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-N\beta\mu_m H)^2 e^{-\frac{x^2}{2N}}dx = \frac{\mu_m^2 H^2}{\sqrt{2N\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2 - 2N\beta\mu_m Hx + N^2\beta^2\mu_m^2 H^2)e^{-\frac{x^2}{2N}}dx \\ &= \frac{\mu_m^2 H^2}{\sqrt{2N\pi}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1/(2N)^2}} + N^2\beta^2\mu_m^2 H^2\sqrt{\frac{\pi}{1/(2N)}}\right) = \mu_m^2 H^2(N + N^2\beta^2\mu_m^2 H^2)\end{aligned} \tag{22}$$

$$\therefore\ \langle\Delta E^2\rangle = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 = N\mu_m^2 H^2 \tag{23}$$

となり、こちらも分配関数から求めたものと一致する。