東北大天文学専攻H20年、物理問題 [2]

update: 2017 Aug. 09, author: Sho K. NAKAMURA

[1] 一様磁場中の点電荷の運動

(a)

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\frac{\mathbf{B}}{c}\right) = \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{1}$$

$\mathbf{B} = B_z\mathbf{e}_z$ より

$$\mathbf{v}\times\mathbf{B} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_yB_z \\ -v_xB_z \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\therefore \begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{qB_z}{c}v_y \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{qB_z}{c}v_x \\ m\dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

(3) 式の z 成分より

$$v_z = \mathrm{const} \tag{4}$$

さらに (3) 式から $v_x + iv_y \equiv Z$ とおくと

$$m\frac{dZ}{dt} = -i\frac{qB_z}{c}Z \implies \frac{dZ}{dt} = -i\frac{qB_z}{mc}Z \implies Z = C_1e^{-i\omega_{ce}t}\ (\omega_{ce} \equiv qB_z/mc) \tag{5}$$

よって $x + iy$ は

$$x + iy = \frac{C_1}{-i\omega_{ce}}e^{-i\omega_{ce}t} + C_2 \tag{6}$$

(3), (6) 式より z 方向には等速直線運動、x, y 方向には円運動より (i) 粒子は磁力線の周りに螺旋運動をする。
(6) 式の位相変化は $-\omega_{ce}t$ より (ii)z 軸正方向からみて時計回りに回転する。
粒子の回転振動数は (iii)(6) 式より $\omega_{ce} = qB_z/mc$ である。

[2] 磁場のガウス則

$\mathbf{B} = B_R(R,z)\mathbf{e}_R + B_z\mathbf{e}_z(z)$ のとき、円筒座標系での発散公式を用いて

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_R) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial R}(RB_R) = -R\frac{dB_z}{dz} \implies B_R = -\frac{1}{2}R\frac{dB_z}{dz} + \frac{C_3}{R} \tag{7}$$

$dB_z/dz = 0$ のとき $B_R = 0$ より $C_3 = 0$。よって

$$B_R = -\frac{1}{2}R\frac{dB_z}{dz} \tag{8}$$

[3] 磁場による粒子のミラーリング

$$m\frac{dv_z}{dt} = -\frac{q}{c}v_\phi B_R \tag{9}$$

初期に $v_z > 0, v_\phi = -R\omega_{ce}$ で螺旋運動をしているとする。これを (9) に代入。

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{q}{mc}(-R\omega_{ce})B_R \underbrace{=}_{(8)} -\frac{qR^2\omega_{ce}}{2mc}\frac{dB_z}{dz} = -\frac{R^2\omega_{ce}^2}{2B_z}\frac{dB_z}{dz} = -\frac{1}{2}\underbrace{\frac{v_\phi^2}{B_z}}_{\text{const}}\frac{dB_z}{dz} \tag{10}$$

$B_z > 0, dB_z/dz > 0$ より $dv_z/dz < 0$ である。よって初期に $v_z > 0$ ならば減速し、途中で $v_z = 0$ となり $v_z < 0$ となる。すなわち z の負方向に跳ね返る。