東北大天文学専攻H17年、物理問題［１］

update: 2017 Aug. 06, author: Sho K. NAKAMURA

［１］中心力場における角運動量保存則

中心力場より

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r \tag{1}$$

これより

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} - \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{r} \times \mathbf{e}_r = \mathbf{0} \tag{2}$$

よって角運動量ベクトルは保存する。その定義より、$\mathbf{J}$ は $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ の張る面に垂直なベクトルである。そのベクトルが保存、すなわち時間によらず一定なので、$\mathbf{r}, \mathbf{v}$ の張る面も一定である。よって粒子の運動は 1 つの平面内に限られることがわかる。

［２］ラグランジアン

運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mv_\theta^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \tag{3}$$

$$\therefore\ L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - U(r) \tag{4}$$

［３］運動方程式の導出

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r},\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{5}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \implies m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \tag{6}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \implies \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \tag{7}$$

［４］円運動半径

$r = r_c$ の円運動をしているとき、$\dot{r} = \ddot{r} = 0$。さらにこの系の角運動量の大きさを用いて $mr_c^2\dot{\theta} = J(\mathrm{const})$ と書けるので

$$\dot{\theta} = \frac{J}{mr_c^2} \tag{8}$$

である。よって

$$mr_c\left(\frac{J}{mr_c^2}\right)^2 - \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r_c} = 0 \implies r_c = \left(\frac{J^2}{m}\frac{1}{\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r_c}}\right)^{1/3} \tag{9}$$

[5] バネによる円運動中の摂動運動

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = -kr \tag{10}$$

$$0 = mr_c\omega_\theta^2 - kr_c \implies \omega_\theta = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11}$$

$$mr_c^2\omega_\theta = J_\theta(\mathrm{const}) \tag{12}$$

円運動からわずかにずれたとして

$$\begin{cases} r = r_c + \alpha \\ \dot{\theta} = \omega_\theta + \beta \\ J = J_\theta + \gamma \end{cases} \tag{13}$$

のように摂動運動を表現する。α, β, γ の 2 次以上の項は無視する。

$$m\ddot{\alpha} = m(r_c+\alpha)(\omega_\theta+\beta)^2 - k(r_c+\alpha) \simeq mr_c\omega_\theta^2 + 2mr_c\omega_\theta\beta + m\alpha\omega_\theta^2 - kr_c - k\alpha = 2mr_c\omega_\theta\beta + m\alpha\omega_\theta^2 - k\alpha \tag{14}$$

$$m(r_c+\alpha)^2(\omega_\theta+\beta) \simeq mr_c^2\omega_\theta + 2mr_c\alpha\omega_\theta + mr_c^2\beta = J_\theta + \gamma \implies 2mr_c\alpha\omega_\theta + mr_c^2\beta = \gamma \tag{15}$$

$\frac{dJ}{dt} = 0$ より γ も定数である。

$$\beta = \frac{\gamma}{mr_c^2} - \frac{2\omega_\theta}{r_c}\alpha \tag{16}$$

より

$$\therefore m\ddot{\alpha} = 2mr_c\omega_\theta\left(\frac{\gamma}{mr_c^2} - \frac{2\omega_\theta}{r_c}\alpha\right) + m\alpha\omega_\theta^2 - k\alpha = -4m\omega_\theta^2\alpha + \frac{2\gamma\omega_\theta}{r_c} + m\underbrace{\omega_\theta^2}_{=k/m}\alpha - k\alpha = -4m\omega_\theta^2\alpha + \frac{2\gamma\omega_\theta}{r_c} \tag{17}$$

よって $\ddot{\alpha} = -4\omega_\theta^2\alpha + \text{定数}$ である。よって微小振動の周期は $\sqrt{4\omega_\theta^2} = 2\omega_\theta$ である。