東北大天文学専攻H20年、物理問題[1]

update: 2017 Aug. 14, author: Sho K. NAKAMURA

[1] 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーとラグランジュ関数の極座標表示

中心力と中心力ポテンシャルより

$$mF(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \implies U = -\int_{\infty}^{r} mF(r')dr' \tag{1}$$

運動エネルギーは $T = \frac{1}{2}mv^2$ より

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \tag{2}$$

よってラグランジュ関数 L は

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \int_{\infty}^{r} mF(r')dr' \tag{3}$$

[2] 質点の運動方程式

ラグランジュ運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{5}$$

に

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\ \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mF(r) \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{7}$$

を代入する。

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mF(r) \tag{8}$$

$$mr^2\dot{\theta} = \text{const} = h \tag{9}$$

[3] 円運動

半径 $r = r_0$ の円運動のとき、$\dot{\theta} = \omega_0, h = h_0$ とすると、(8), (9) 式より

$$0 = r_0\omega_0^2 + F(r_0) \implies \omega_0 = \sqrt{-F(r_0)/r_0} \tag{10}$$

$$h_0 = mr_0^2\omega_0 = m\sqrt{-r_0^3 F(r_0)} \tag{11}$$

[4] 微小量の方程式

$r = r_0 + x, \dot{\theta} = \omega_0 + y, h = h_0 + \xi$ を (8), (9) 式に代入。

$$\ddot{x} = (r_0 + x)(\omega_0 + y)^2 + F(r_0 + x) \simeq r_0\omega_0^2 + 2r_0\omega_0 y + x\omega_0^2 + F(r_0 + x) \tag{12}$$

$F(r_0 + x) \simeq F(r_0) + \left.\frac{dF}{dr}\right|_{r_0} x$ と展開できる。また (10) 式より

$$\ddot{x} = 2r_0\omega_0 y + \omega_0^2 x + \left.\frac{dF}{dr}\right|_{r_0} x \tag{13}$$

$$h_0 + \xi = m(r_0 + x)^2(\omega_0 + y) \simeq mr_0^2\omega_0 + mr_0^2 y + 2mr_0 x\omega_0 \underbrace{\implies}_{(11)} \xi = mr_0^2 y + 2mr_0\omega_0 x \implies y = \frac{\xi}{mr_0^2} - 2\frac{\omega_0}{r_0}x \tag{14}$$

これを (13) 式に代入する。

$$\ddot{x} = 2r_0\omega_0\left(\frac{\xi}{mr_0^2} - 2\frac{\omega_0}{r_0}x\right) + \omega_0^2 x + \left.\frac{dF}{dr}\right|_{r_0} = \left(-3\omega_0^2 + \left.\frac{dF}{dr}\right|_{r_0}\right)x + \frac{2\omega_0}{mr_0}\xi \tag{15}$$

ここで、角運動量保存式 (9) 式より $h = h_0 + \xi = \mathrm{comst}$ なので、ξ も定数である。

[5] ある $F(r)$ における安定な円運動半径

微小な摂動を加えた時に、その摂動が振動解を持てば安定と言える。

$$(10) \implies \omega_0^2 = -\frac{F(r_0)}{r_0} = \frac{a}{r_0^3} + \frac{b}{r_0^5} \tag{16}$$

$$\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r_0} = \frac{2a}{r_0^3} + \frac{4b}{r_0^5} \tag{17}$$

$$\therefore \ddot{x} = \left(-\frac{a}{r_0^3} + \frac{b}{r_0^5}\right)x + \frac{2\omega_0}{mr_0}\xi \tag{18}$$

x の係数が負になれば振動解となる。よって安定な円運動をするための条件は

$$-ar_0^2 + b < 0 \implies r_0 > \sqrt{\frac{b}{a}} \tag{19}$$

よって安定な円運動の最小半径は $\sqrt{b/a}$ である。

[6] ある $F(r)$, ある摂動のときの x, θ の時間変化

摂動の与え方より、$\xi = 0$ としてよい。

$$\ddot{x} = -\frac{a}{r_0^3}x \implies x = Ae^{i\sqrt{a/r_0^3}t} + Be^{-i\sqrt{a/r_0^3}t} \tag{20}$$

$t = 0$ で $x = 0, \dot{x} = v$ より

$$x(0) = A + B = 0,\ \dot{x}(0) = i\sqrt{a/r_0^3}A - i\sqrt{a/r_0^3}B = v \implies A = -B = \frac{v}{2i\sqrt{a/r_0^3}} \tag{21}$$

$$\therefore x = v\sqrt{\frac{r_0^3}{a}}\sin\sqrt{\frac{a}{r_0^3}}t \underbrace{=}_{(10)} \frac{v}{\omega_0}\sin\omega_0 t \tag{22}$$

$$(14) \implies \dot{\theta} = \omega_0 - 2\frac{\omega_0}{r_0}x = \omega_0 - \frac{2v}{r_0}\sin\omega_0 t \implies \theta = \omega_0 t + \frac{2v}{r_0\omega_0}\cos\omega_0 t + C \tag{23}$$

$t = 0$ で $\theta = 0$ より

$$\theta = \omega_0 t + \frac{2v}{r_0\omega_0}(\cos\omega_0 t - 1) \tag{24}$$