球ベッセル, 球ノイマン関数の公式導出

update: 2017 July 01, author: Sho K. NAKAMURA

球ハンケル関数

ゼロ以上の整数 n に対して、球ベッセル関数 j_n と球ノイマン関数 y_n を

$$j_n(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+3/2)k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+k} = (-1)^n z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \frac{\sin z}{z} \tag{1}$$

$$y_n(z) \equiv (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-n-1/2}(z) = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\Gamma(-n+\ell+1/2)\ell!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+\ell-1} = (-1)^{n+1} z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \frac{\cos z}{z} \tag{2}$$

のように、半整数次のベッセル関数を用いて定義する。そしてこれらを用いて第 1, 2 種ハンケル関数 $h_n^{(1)}, h_n^{(2)}$ をそれぞれ

$$h_n^{(1)} \equiv j_n + i y_n \tag{3}$$

$$h_n^{(2)} \equiv j_n - i y_n \tag{4}$$

と定義する。これら定義式より

$$h_n^{(1)} = j_n + i y_n = (-1)^n z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z} - i\frac{\cos z}{z}\right) = (-1)^{n+1} i z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \frac{e^{iz}}{z} \tag{5}$$

$$h_n^{(2)} = j_n - i y_n = (-1)^n z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z} + i\frac{\cos z}{z}\right) = (-1)^{n+1} i z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \frac{e^{-iz}}{z} \tag{6}$$

と書ける。これをさらに z^2 微分を用いて整理する。

$$\ell = z^2 \implies d\ell = 2z dz \implies \frac{d}{d\ell} = \frac{d}{dz^2} = \frac{1}{2z}\frac{d}{dz} \implies \frac{d}{dz} = 2z\frac{d}{dz^2} \implies \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n = 2^n \left(\frac{d}{dz^2}\right)^n \tag{7}$$

$$\therefore\ h_n^{(1)} = (-1)^{n+1} (2z)^n \left(\frac{d}{dz^2}\right)^n \frac{e^{iz}}{z} \tag{8}$$

$$\therefore\ h_n^{(2)} = (-1)^{n+1} (2z)^n \left(\frac{d}{dz^2}\right)^n \frac{e^{-iz}}{z} \tag{9}$$

これらをさらに式変形して、球ハンケル関数が満たす漸化式を導出しよう。以下、簡単のため、微分演算子 $\hat{a} \equiv d/dz^2$ を定義する。

$$[z^2, \hat{a}] f(z^2) = z^2 \hat{a} f(z^2) - \hat{a}(z^2 f(z)) = z^2 \hat{a} f(z^2) - f(z) - z^2 \hat{a} f(z^2) = -f(z) \tag{10}$$

よりこの演算子は交換関係

$$z^2 \hat{a} - \hat{a} z^2 = -1 \tag{11}$$

を満たす。また任意の演算子において

$$[A, BC] = ABC - BCA = (ABC - BAC) + (BAC - BCA) = [A, B]C + B[A, C] \tag{12}$$

が成立するので、

$$\begin{aligned} [z^2, \hat{a}^{n+1}] &= [z^2, \hat{a}\hat{a}^n] = [z^2, \hat{a}]\hat{a}^n + \hat{a}[z^2, \hat{a}^n] = -\hat{a}^n + \hat{a}[z^2, \hat{a}\hat{a}^{n-1}] = -\hat{a}^n + \hat{a}([z^2, \hat{a}]\hat{a}^{n-1} + \hat{a}[z^2, \hat{a}^{n-1}]) \\ &= -2\hat{a}^n + \hat{a}^2[z^2, \hat{a}^{n-1}] = \cdots = -n\hat{a}^n + \hat{a}^n[z^2, \hat{a}] = -(n+1)\hat{a}^n \implies \therefore z^2\hat{a}^{n+1} = \hat{a}^{n+1}z^2 - (n+1)\hat{a}^n \end{aligned} \tag{13}$$

となる。(8) 式より

$$\begin{aligned} zh_{n+1}^{(1)} &= zi(-1)^{n+1}(2z)^{n+1}\hat{a}^{n+1}(e^{iz}/z) = 2i(-1)^{n+1}(2z)^n \underbrace{z^2\hat{a}^{n+1}}_{(13)}(e^{iz}/z) = 2i(-1)^{n+1}(2z)^n\{\hat{a}^{n+1}z^2 - (n+1)\hat{a}^n\}(e^{iz}/z) \\ &= 2(n+1)h_n^{(1)} + 2i(-1)^n(2z)^n\hat{a}^{n+1}(ze^{iz}) \end{aligned} \tag{14}$$

(9) 式より

$$\begin{aligned} zh_{n+1}^{(2)} &= zi(-1)^{n+1}(2z)^{n+1}\hat{a}^{n+1}(e^{-iz}/z) = 2i(-1)^{n+1}(2z)^n \underbrace{z^2\hat{a}^{n+1}}_{(13)}(e^{-iz}/z) = 2i(-1)^{n+1}(2z)^n\{\hat{a}^{n+1}z^2 - (n+1)\hat{a}^n\}(e^{-iz}/z) \\ &= 2(n+1)h_n^{(2)} + 2i(-1)^{n+1}(2z)^n\hat{a}^{n+1}(ze^{-iz}) \end{aligned} \tag{15}$$

と書ける。ここで $\hat{a} = d/dz^2 = d/d\ell$ とすると

$$\hat{a}^2(ze^{iz}) = \hat{a}^2(\ell^{1/2}e^{i\ell^{1/2}}) = \hat{a}\left(\frac{1}{2}\ell^{-1/2}e^{i\ell^{1/2}} + \frac{1}{2}ie^{i\ell^{1/2}}\right) = \hat{a}\frac{1}{2}\ell^{-1/2}e^{i\ell^{1/2}} + \frac{1}{2}i\hat{a}e^{i\ell^{1/2}} = \frac{1}{2}\hat{a}(e^{iz}/z) - \frac{1}{4}(e^{iz}/z) \tag{16}$$

$$\hat{a}^2(ze^{-iz}) = \hat{a}^2(\ell^{1/2}e^{-i\ell^{1/2}}) = \hat{a}\left(\frac{1}{2}\ell^{-1/2}e^{-i\ell^{1/2}} - \frac{1}{2}ie^{-i\ell^{1/2}}\right) = \hat{a}\frac{1}{2}\ell^{-1/2}e^{-i\ell^{1/2}} - \frac{1}{2}i\hat{a}e^{-i\ell^{1/2}} = \frac{1}{2}\hat{a}(e^{-iz}/z) - \frac{1}{4}(e^{-iz}/z) \tag{17}$$

のように計算できる。これらを用いて (14), (15) をさらに整理していこう。

$$\begin{aligned} zh_{n+1}^{(1)} &= 2(n+1)h_n^{(1)} + 2i(-1)^n(2z)^n\hat{a}^{n-1}\hat{a}^2(ze^{iz}) = 2(n+1)h_n^{(1)} + 2i(-1)^n(2z)^n\hat{a}^{n-1}\left\{\frac{1}{2}\hat{a}(e^{iz}/z) - \frac{1}{4}(e^{iz}/z)\right\} \\ &= 2(n+1)h_n^{(1)} + 2i(-1)^n(2z)^n\hat{a}^{n-1}\left\{\frac{1}{2}\hat{a}(e^{iz}/z) - \frac{1}{4}(e^{iz}/z)\right\} \\ &= 2(n+1)h_n^{(1)} - i(-1)^{n+1}(2z)^n\hat{a}^n(e^{iz}/z) - zi(-1)^n(2z)^{n-1}\hat{a}^{n-1}(e^{iz}/z) \\ &= 2(n+1)h_n^{(1)} - i(-1)^{n+1}(2z)^n\hat{a}^n(e^{iz}/z) - zi(-1)^n(2z)^{n-1}\hat{a}^{n-1}(e^{iz}/z) = (2n+1)h_n^{(1)} - zh_{n-1}^{(1)} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\therefore \frac{2n+1}{z}h_n^{(1)} = h_{n+1}^{(1)} + h_{n-1}^{(1)} \tag{19}$$

$$
\begin{aligned}
zh^{(2)}_{n+1} &= 2(n+1)h^{(2)}_n + 2i(-1)^{n+1}(2z)^n\hat{a}^{n-1}\hat{a}^2(ze^{-iz}) = 2(n+1)h^{(2)}_n + 2i(-1)^{n+1}(2z)^n\hat{a}^{n-1}\left\{\frac{1}{2}\hat{a}(e^{-iz}/z) - \frac{1}{4}(e^{-iz}/z)\right\} \\
&= 2(n+1)h^{(2)}_n - i(-1)^n(2z)^n\hat{a}^n(e^{-iz}/z) - (-1)^2 zi(-1)^{n-1}(2z)^{n-1}\hat{a}^{n-1}(e^{-iz}/z) \\
&= (2n+1)h^{(2)}_n - zh^{(2)}_n \qquad (20)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \frac{2n+1}{z}h^{(2)}_n = h^{(2)}_{n+1} + h^{(2)}_{n-1} \qquad (21)
$$

のような漸化式を満たす。さらに $h^{(1)}_n, h^{(2)}_n$ を微分すると

$$
\frac{dh^{(1)}_n}{dz} = 2ni(-1)^{n+1}(2z)^{n-1}\hat{a}^n(e^{iz}/z) + i(-1)^{n+1}(2z)^n\frac{d}{dz}\{\hat{a}^n(e^{iz}/z)\} \qquad (22)
$$

$\ell = z^2 \to \hat{a} = d/d\ell = (2z)^{-1}d/dz$ より

$$
\frac{dh^{(1)}_n}{dz} = 2ni(-1)^{n+1}(2z)^{n-1}\hat{a}^n(e^{iz}/z) + i(-1)^{n+1}(2z)^{n+1}\hat{a}^{n+1}(e^{iz}/z) = \frac{n}{z}h^{(1)}_n - h^{(1)}_{n+1} \qquad (23)
$$

$$
\frac{dh^{(2)}_n}{dz} = 2ni(-1)^n(2z)^{n-1}\hat{a}^n(e^{iz}/z) + i(-1)^n(2z)^{n+1}\hat{a}^{n+1}(e^{iz}/z) = \frac{n}{z}h^{(2)}_n - h^{(2)}_{n+1} \qquad (24)
$$

これらを用いて以下の漸化式が求められる。

$$
(18),(23) \implies \frac{dh^{(1)}_n}{dz} = \frac{n}{z}h^{(1)}_n - \frac{1}{z}\{(2n+1)h^{(1)}_n - zh^{(1)}_{n-1}\} = -\frac{n+1}{z}h^{(1)}_n + h^{(1)}_{n-1} \qquad (25)
$$

$$
(20),(24) \implies \frac{dh^{(2)}_n}{dz} = \frac{n}{z}h^{(2)}_n - \frac{1}{z}\{(2n+1)h^{(2)}_n - zh^{(2)}_{n-1}\} = -\frac{n+1}{z}h^{(2)}_n + h^{(2)}_{n-1} \qquad (26)
$$

$$
(19),(23) \implies \frac{dh^{(1)}_n}{dz} = \frac{n}{2n+1}(h^{(1)}_{n+1} + h^{(1)}_{n-1}) - h^{(1)}_{n+1} = -\frac{n+1}{2n+1}h^{(1)}_{n+1} + \frac{n}{2n+1}h^{(1)}_{n-1} \qquad (27)
$$

$$
(21),(24) \implies \frac{dh^{(2)}_n}{dz} = \frac{n}{2n+1}(h^{(2)}_{n+1} + h^{(2)}_{n-1}) - h^{(2)}_{n+1} = -\frac{n+1}{2n+1}h^{(2)}_{n+1} + \frac{n}{2n+1}h^{(2)}_{n-1} \qquad (28)
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
(23)\times z \implies z\frac{dh^{(1)}_n}{dz} = nh^{(1)}_n - zh^{(1)}_{n+1} \underbrace{\implies}_{d/dz\times} \frac{dh^{(1)}_n}{dz} + z\frac{d^2h^{(1)}_n}{dz^2} &= n\frac{dh^{(1)}_n}{dz} - h^{(1)}_{n+1} - z\underbrace{\frac{dh^{(1)}_{n+1}}{dz}}_{(25)} \\
&= n\frac{dh^{(1)}_n}{dz} - h^{(1)}_{n+1} - z\left(-\frac{n+2}{z}h^{(1)}_{n+1} + h^{(1)}_n\right) = n\frac{dh^{(1)}_n}{dz} + (n+1)\underbrace{h^{(1)}_{n+1}}_{(23)} - zh^{(1)}_n
\end{aligned}
$$

$$
\implies \frac{dh^{(1)}_n}{dz} + z\frac{d^2h^{(1)}_n}{dz^2} = n\frac{dh^{(1)}_n}{dz} + (n+1)\left(\frac{n}{z}h^{(1)}_n - \frac{dh^{(1)}_n}{dz}\right) - zh^{(1)}_n = -\frac{dh^{(1)}_n}{dz} + \frac{n(n+1)}{z}h^{(1)}_n - zh^{(1)}_n
$$

$$
\implies \frac{2}{z}\frac{dh^{(1)}_n}{dz} + \frac{d^2h^{(1)}_n}{dz^2} = \frac{n(n+1)}{z^2}h^{(1)}_n - h^{(1)}_n \qquad (29)
$$

$$\therefore \frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{dh_n^{(1)}}{dz}\right)+\left\{1-\frac{n(n+1)}{z^2}\right\}h_n^{(1)}=0 \tag{30}$$

ハンケル関数の定義より、球ベッセル・球ノイマン関数はハンケル関数の重ね合わせで表現される。したがってこれまで示した漸化式・方程式は球ベッセル・球ノイマン関数も満たす。よって

$$\frac{d^2j_n}{dz^2}+\frac{2}{z}\frac{dj_n}{dz}+\left\{1-\frac{n(n+1)}{z^2}\right\}j_n=0 \tag{31}$$

$$\frac{d^2y_n}{dz^2}+\frac{2}{z}\frac{dy_n}{dz}+\left\{1-\frac{n(n+1)}{z^2}\right\}y_n=0 \tag{32}$$

をそれぞれ満たす。

$$zy_n\times(31)=zy_n\frac{d^2j_n}{dz^2}+2y_n\frac{dj_n}{dz}+z\left\{1-\frac{n(n+1)}{z^2}\right\}y_nj_n=0$$

$$zj_n\times(32)=zj_n\frac{d^2y_n}{dz^2}+2j_n\frac{dy_n}{dz}+z\left\{1-\frac{n(n+1)}{z^2}\right\}j_ny_n=0$$

この 2 式の辺々を引き算すると

$$z\left(y_n\frac{d^2j_n}{dz^2}-j_n\frac{d^2y_n}{dz^2}\right)+2\left(y_n\frac{dj_n}{dz}-j_n\frac{dy_n}{dz}\right)=0 \implies \frac{d}{dz}\left\{z^2\left(j_n\frac{dy_n}{dz}-y_n\frac{dj_n}{dz}\right)\right\}=0$$

$$\therefore j_n\frac{dy_n}{dz}-y_n\frac{dj_n}{dz}=\frac{C}{z^2} \tag{33}$$

C は積分定数である。この定数を (1), (2) 式を用いて実際に計算していこう。

$$\frac{dj_n}{dz}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n+k)}{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)k!}\frac{z^{n+k-1}}{2^{n+k}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n+k)}{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+k} \tag{34}$$

$$\frac{dy_n}{dz}=(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell(-n+\ell-1)}{\Gamma\left(-n+\ell+\frac{1}{2}\right)\ell!}\frac{z^{-n+\ell-2}}{2^{-n+\ell-1}}=(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{\pi}}{z^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell(-n+\ell-1)}{\Gamma\left(-n+\ell+\frac{1}{2}\right)\ell!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+\ell} \tag{35}$$

より

$$j_n\frac{dy_n}{dz}=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{2z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+\ell}(-n+\ell-1)}{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-n+\ell+\frac{1}{2}\right)k!\ell!}\left(\frac{z}{2}\right)^{k+\ell}$$

k,ℓ の 2 重の総和のために計算は煩雑になると思われるが、興味があるのは z^{-2} の係数のみである。z^{-2} はすでに式の先頭に出てきているので、総和の部分は $k=\ell=0$ のみを考えればよい。

$$\begin{aligned}\left(j_n\frac{dy_n}{dz}\text{の } z^{-2}\text{の項}\right) &= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{2z^2}\frac{-n-1}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{(-1)^{n+1}\pi}{2z^2}\frac{-n-1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)}\\ &\underbrace{=}_{(??)}\frac{(-1)^{n+1}\pi}{2z^2}\frac{-n-1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1)^n\pi}=\frac{n+1}{2n+1}\frac{1}{z^2}\end{aligned} \tag{36}$$

同様に

$$y_n \frac{dj_n}{dz} = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{2z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\ell}(n+k)}{\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-n+\ell+\frac{1}{2}\right)k!\ell!} \left(\frac{z}{2}\right)^{k+\ell}$$

より

$$\begin{aligned}
(y_n \frac{dj_n}{dz} \text{の } z^{-2} \text{の項}) &= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{2z^2} \frac{n}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{2z^2} \frac{n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\pi}{2z^2} \frac{n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1)^n\pi} = -\frac{n}{2n+1}\frac{1}{z^2} \qquad (37)
\end{aligned}$$

$$\therefore (33),(36),(37) \implies j_n \frac{dy_n}{dz} - y_n \frac{dj_n}{dz} = \frac{1}{z^2} \qquad (38)$$

Bibliography

[1] 中山 恒義, ”裳華房フィジックスライブラリー 物理数学 II”, 裳華房

[2] Wolfram MathWorld website (http://mathworld.wolfram.com/)