連星系に関する問題(Roche問題)

update:May. 08. 2012, presented by Sho Nakamura

概要

2 つの星の質量が M_1, M_2 であるような連星系を考え、その連星系での流体の運動を調べる。この問題を Roche 問題と呼ぶ。以下では流体の運動を、互いに軌道運動している 2 つの星が作るポテンシャル中のテスト粒子の運動と同等であるとして調べる (制限三体問題)。従って、テスト粒子は錬成の軌道運動には影響を与えないものとする。2 つの星は互いに円運動をしているものとし、ポテンシャルを計算するにあたっては星は質点として扱う。

Kepler の法則と軌道半径の見積もり

軌道半径 a、公転周期 Π の連星系では、ケプラーの法則

$$4\pi^2 a^3 = G(M_1+M_2)\Pi^2 \tag{1}$$

が成立しているとする。これより

$$a^3 = \frac{G(M_1+M_2)}{4\pi^2}\Pi^2 \underbrace{=}_{q\equiv M_2/M_1} \frac{GM_1(1+q)}{4\pi^2}\Pi^2 = \frac{GM_\odot}{4\pi^2}\frac{M_1}{M_\odot}(1+q)\Pi^2 \simeq 3.5\times10^{24}\frac{M_1}{M_\odot}(1+q)\Pi^2 \tag{2}$$

Π を $1\mathrm{yr} = 3.153\times10^7$ で規格化して表現したものを計算例として示す。

$$a^3 \simeq 3.5\times10^{24}\times(3.153\times10^7)^2\frac{M_1}{M_\odot}(1+q)\left(\frac{\Pi}{1\mathrm{yr}}\right)^2 \simeq 3.5\times\underbrace{3.153^2\times10^{38}}_{\sim10^{39}}\frac{M_1}{M_\odot}(1+q)\left(\frac{\Pi}{1\mathrm{yr}}\right)^2$$

$$\Longrightarrow\quad a \simeq 1.5\times10^{13}\left(\frac{M_1}{M_\odot}\right)^{1/3}(1+q)^{1/3}\left(\frac{\Pi}{1\mathrm{yr}}\right)^{2/3}\quad(\mathrm{cm}) \tag{3}$$

同様に、Π を day, hour で規格化した場合に係数がどのようになるか見積もっておくと便利である。答えはそれぞれ $2.9\times10^{11}, 3.5\times10^{10}$ 程度になる。

Roche potential.

連星系の質量中心 (重心) を座標原点とし、その原点の周りを公転周期 Π で回転する座標系にのったとき、連星系の重力場中のテスト粒子の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\Phi_R - 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v} \tag{4}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{G(M_1+M_2)}{a^3}} \tag{5}$$

$$\Phi_R = -\frac{GM_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} - \frac{GM_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} - \frac{1}{2}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})^2 \tag{6}$$

と書ける。ここで、$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ はそれぞれ原点からはかった連星の星の位置ベクトル、公転の角振動数 $\Omega = 2\pi/\Pi$ である。また以下の問題では $\boldsymbol{\Omega}$ は連星の軌道面と垂直な方向に向いているとしてよい。
軌道面に垂直に z 軸をとる。軌道面内において 2 つの星を結ぶ線を x 軸にとり、それに垂直な軸を y 軸とする。
まずはこの座標系における連星の位置を求めよう。座標系の取り方より、

$$\frac{M_1x_1 + M_2x_2}{M_1 + M_2} = \alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \implies x_1 = -\frac{\beta}{\alpha}x_2 \tag{7}$$

ここで、$\alpha = 1/(1+q), \beta = q/(1+q)$ である。連星系は常に円運動をしており、その軌道半径は a なので

$$x_1 - x_2 = a \tag{8}$$

$$\therefore x_1 + \frac{\alpha}{\beta}x_1 = \frac{\overbrace{\alpha+\beta}^{=1}}{\beta}x_1 = \frac{x_1}{\beta} = a \tag{9}$$

同様にして

$$-\frac{\beta}{\alpha}x_2 - x_2 = -\frac{\overbrace{\alpha+\beta}^{=1}}{\alpha}x_2 = -\frac{x_2}{\alpha} = a \tag{10}$$

$\mathbf{e}_i$ を i 方向の単位ベクトルとすると、$\mathbf{r} = (x,y,z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{e}_x, \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{e}_x$、さらに $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$ より

$$\begin{aligned}
(6) \implies \Phi_R &= -\frac{GM_1}{\sqrt{(x-\beta a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x+\alpha a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{2}\left\{(\Omega x)^2 + (-\Omega y)^2\right\} \\
&= -\frac{G(M_1+M_2)}{a}\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{(X-\beta)^2 + Y^2 + Z^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{(X+\alpha)^2 + Y^2 + Z^2}}\right\} - \frac{1}{2}\underbrace{\Omega^2}_{(5)}a^2(X^2+Y^2) \\
&= -\frac{G(M_1+M_2)}{a}\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{(X-\beta)^2 + Y^2 + Z^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{(X+\alpha)^2 + Y^2 + Z^2}} + \frac{1}{2}(X^2+Y^2)\right\} \\
&\equiv \frac{G(M_1+M_2)}{a}\Psi_{\text{eff}} = a^2\Omega^2\Psi_{\text{eff}}
\end{aligned} \tag{11}$$

と書ける。途中、$x/a \to X, y/a \to Y, z/a \to Z$ のように座標を長さ a で規格化した。

連星を結ぶ直線上にある Lagrange points.

$Y = Z = 0$ のとき、

$$\Psi_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{\sqrt{(X-\beta)^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{(X+\alpha)^2}} - \frac{1}{2}X^2 \implies \frac{\partial\Psi_{\text{eff}}}{\partial X} = \frac{\alpha(X-\beta)}{((X-\beta)^2)^{3/2}} + \frac{\beta(X+\alpha)}{((X+\alpha)^2)^{3/2}} - X \tag{12}$$

この微分係数が 0、となるところが極値である (fig1, fig2 参照)。しかし、式を見た限りではこれは解析的には解けそうにない。よって、この $\partial\Psi_{\text{eff}}/\partial X \equiv f(x)$ として、この $f(X) = 0$ となる解を探そう。そのためにはもう一度 X で微分する必要がある。

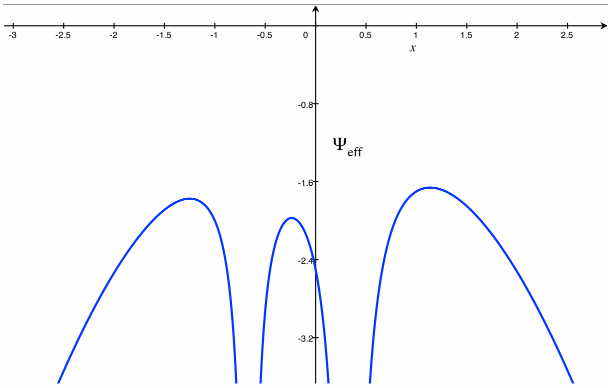

fig 1: $q = 0.5, y = z = 0$ での有効ポテンシャルの形。

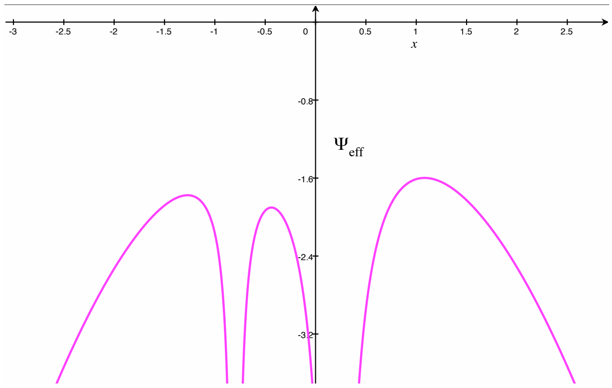

fig 2: $q = 0.25, y = z = 0$ での有効ポテンシャルの形。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial X} &= \alpha\frac{((X-\beta)^2)^{3/2}-(X-\beta)\frac{3}{2}((X-\beta)^2)^{1/2}2(X-\beta)}{((X-\beta)^2)^3}+\beta\frac{((X+\alpha)^2)^{3/2}-(X+\alpha)\frac{3}{2}((X+\alpha)^2)^{1/2}2(X+\alpha)}{((X+\alpha)^2)^3}-1 \\ &= \alpha\frac{-2}{((X-\beta)^2)^{3/2}}+\beta\frac{-2}{((X+\alpha)^2)^{3/2}}-1 \qquad (13)\end{aligned}$$

(12), (13) 式による Newton 法を用いて解を数値的に求める。するとその解は

$$q = 0.5 \quad \cdots \quad x_1 \sim -1.2490473887,\ \ x_2 \sim -0.23741823927,\ \ x_3 \sim 1.1363612940 \qquad (14)$$

$$q = 0.25 \quad \cdots \quad x_1 \sim -1.2710486907,\ \ x_2 \sim -0.43807595854,\ \ x_3 \sim 1.0828394555 \qquad (15)$$

と求まる。

有効ポテンシャル Ψ_{eff} を可視化してみったー

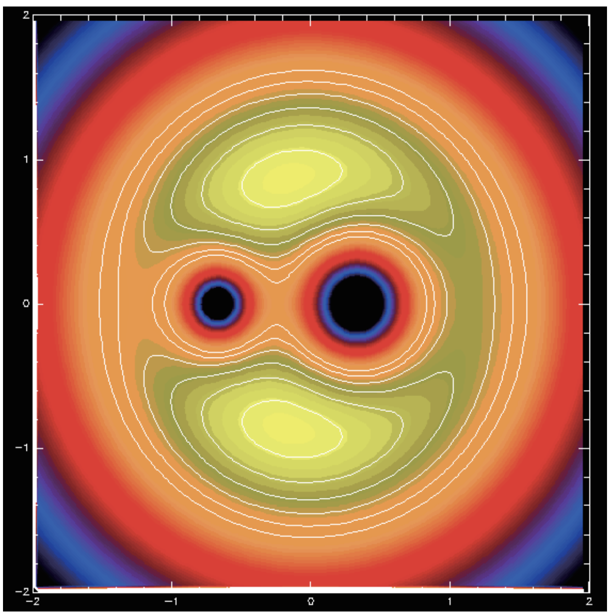

fig 3: $q = 0.5$

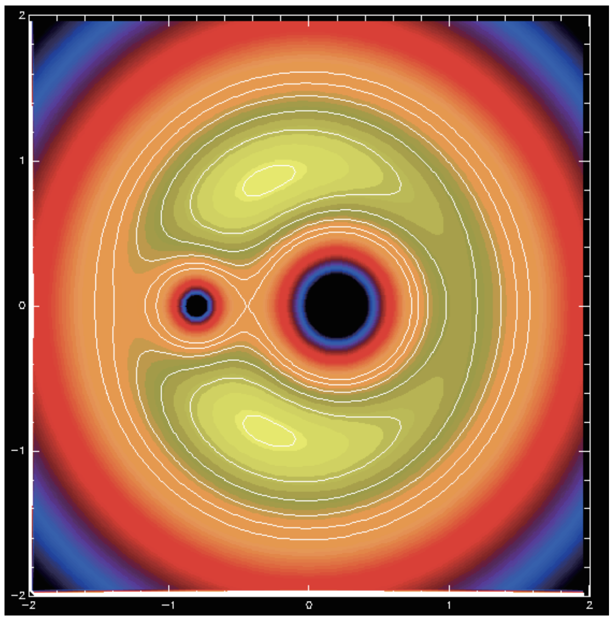

fig 4: $q = 0.25$

テスト粒子の運動

(4) 式の規格化を行う。時間を $1/\Omega$, 長さ (座標) を a, で規格化すると

$$\frac{a}{1/\Omega^2}\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{1}{a}\nabla\Phi_R - 2\Omega\frac{a}{1/\Omega}\mathbf{e}_z \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} \implies \frac{d^2\mathbf{x}}{dx^2} = -\nabla\frac{\Phi_R}{a^2\Omega^2} + 2\begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\ -\frac{dx}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} = -\nabla\Psi_{\mathrm{eff}} + 2\begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\ -\frac{dx}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

のようになる。

$z_1 = x, z_2 = y, z_3 = \dfrac{dx}{dt}, z_4 = \dfrac{dy}{dt}$ とおくと、運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ -\frac{\partial\Phi_{\mathrm{eff}}}{\partial x} + 2z_4 \\ -\frac{\partial\Phi_{\mathrm{eff}}}{\partial y} - 2z_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

のように連立微分方程式となる。これを Runge-Kutta 法などを用いて時間積分してやれば、数値的にテスト粒子の運動を解くことができる。例として、$q = 0.5$ のとき、$(x, y, vx, vy) = (x_2, 0, -0.01, 0)$ の場合を fig5 に示す。

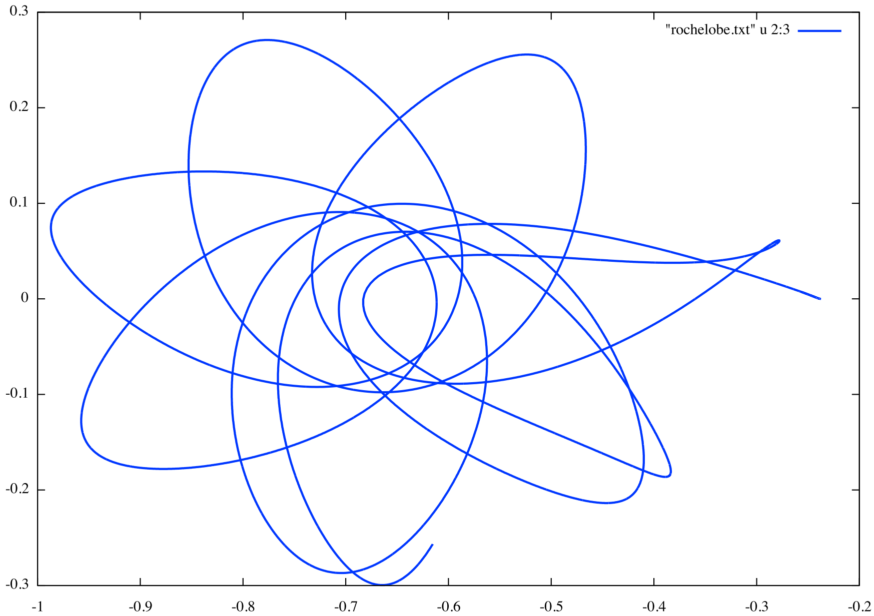

fig 5: テスト粒子の運動 in Roche pot.

Bibliography

[1] 東北大学理学部天文学コース 天体物理学実習 II (担当教官：李准教授) 演習プリント