ニュートリノ振動

update: 2017July 02, author: Sho K. NAKAMURA

太陽から飛来するニュートリノ

ニュートリノが質量を持つことで、自由ニュートリノに対するハミルトニアンの固有状態が個々の質量状態として存在すると仮定する。このとき電子ニュートリノ・μ ニュートリノ・τ ニュートリノなどのフレーバー状態 $|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle, |\nu_\tau\rangle$, はよくわからない質量状態 1, 2, 3 の重ね合わせで表現されるとする。つまり

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{i=1}^{3} U_{\alpha i} e^{-E_i t/\hbar} |\nu_i\rangle \tag{1}$$

のように描かれる。ここで $U_{\alpha i}$ は個々の質量状態の寄与を表すユニタリ行列である。
以後、電子ニュートリノと μ ニュートリノの間の振動のみを考えよう。このとき行列 U は簡単化されて

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2}$$

と表される。ここで θ は混合角 (vacuum mixing angle) と呼ばれるものである。よって電子ニュートリノの時間変化は

$$|\nu_e(t)\rangle = \cos\theta e^{-iE_1 t/\hbar} |\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2 t/\hbar} |\nu_2\rangle \tag{3}$$

E_1, E_2 はそれぞれ同じ運動量に対する 2 つの質量状態 $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$ のエネルギーである。$t = 0$ で電子ニュートリノであったニュートリノに対して、時刻 t での波動関数の電子ニュートリノの成分の振幅は

$$\begin{aligned} \langle\nu_e(0)|\nu_e(t)\rangle &= (\langle\nu_1|\cos\theta + \langle\nu_2|\sin\theta)(\cos\theta e^{-iE_1 t/\hbar}|\nu_1\rangle + \sin\theta e^{-iE_2 t/\hbar}|\nu_2\rangle) \\ &= \cos^2\theta e^{-iE_1 t/\hbar}\langle\nu_1|\nu_1\rangle + \cos\theta\sin\theta\left(e^{i(E_1-E_2)t/\hbar}\langle\nu_1|\nu_2\rangle + e^{i(E_2-E_1)t/\hbar}\langle\nu_1|\nu_2\rangle\right) + \sin^2\theta e^{-iE_2 t/\hbar}\langle\nu_1|\nu_2\rangle \\ &= \cos^2\theta e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin^2\theta e^{-iE_2 t/\hbar} \end{aligned} \tag{4}$$

よって、時刻 0 に電子ニュートリノとして生成されたニュートリノが、時刻 t に電子ニュートリノとして残る確率は

$$\begin{aligned} |\langle\nu_e(0)|\nu_e(t)\rangle|^2 &= \cos^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta(e^{i(E_1-E_2)t/\hbar} + e^{i(E_2-E_1)t/\hbar}) + \sin^4\theta \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta\cdot\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\left\{1-\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)\right\} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\sin^2\left(\frac{E_2-E_1}{2\hbar}t\right) \end{aligned} \tag{5}$$

となる。同じ運動量 p のニュートリノのエネルギーなので、ニュートリノが超相対論的運動 $pc \gg mc^2$ にあるとすると

$$E_2 - E_1 = \sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} - \sqrt{p^2c^2 + m_1^2c^4} \simeq pc\left(1 - \frac{m_2^2c^4}{2p^2c^2}\right) - pc\left(1 - \frac{m_1^2c^4}{2p^2c^2}\right) = \frac{(m_2^2 - m_1^2)c^4}{2pc} \tag{6}$$

より

$$|\langle \nu_e(0)|\nu_e(t)\rangle|^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\pi}{L_V}ct\right) \tag{7}$$

ここで vacuum oscillation lengthL_V を

$$L_V \equiv \frac{4\pi pc\hbar}{(m_2^2 - m_1^2)c^3} \tag{8}$$

と定義した。さらにニュートリノはほぼ光速度で飛来すると考えると、飛来源と観測者の距離を $R = ct$ として

$$|\langle \nu_e(0)|\nu_e(t)\rangle|^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\pi R}{L_V}\right) \tag{9}$$

と書ける。
途中式からわかる通り、質量の 2 乗の差 $m_2^2 - m_1^2$ が有限の値を持つことで、電子ニュートリノの観測される確率が時間に依存することがわかる。これがニュートリノ振動である。

Bibliography

[1] 東北大学理学研究科 恒星物理学特論 II (担当教官：斎尾教授) 講義プリント

[2] 原康夫, 稲見武夫, 青木健一郎, 素粒子物理学, 朝倉書店