物 理（1）

長さ ℓ の糸の先に質量 m のおもりのついた振り子の運動について以下の問いに答えよ。ただし、糸は伸び縮みせず質量は無視できるとし、重力加速度は g とする。

問 1. 鉛直線と振り子の成す角度 θ を独立変数としてラグランジュ関数を表せ。θ に共役な運動量はどう書けるか。また、抵抗力を無視して運動方程式を求めよ。

問 2. 媒体中にある振り子は速度に比例する抵抗力を受ける。抵抗力の速度に対する比例係数を $2m\gamma$ と書くと、運動方程式はどうなるか。ただし、その抵抗力はおもりにだけはたらくとし、γ は定数で振り子の固有角振動数よりも小さいとする。

(a) $\theta \ll 1$ として、この運動方程式の一般解を求めよ。

(b) $t = 0$ で $\theta = \theta_0$、$\dot{\theta} = 0$ に対する解を求めよ。

問 3. また、振り子の支点が $A\cos(\Omega t)$ で水平に動く場合、振り子に対する運動方程式はどのように書けるか。ただし、Ω と A は定数とし、問 2 と同じ抵抗力を考慮し、$\theta \ll 1$ とする。

(a) その運動方程式の一般解を求めよ。

(b) 定常振動に落ち着いたとき、もっとも振幅が大きくなるような Ω を求めよ。

物 理（2）

絶対温度 T の熱浴と熱平衡にある体積 V の気体の系を考える。系と熱浴との間には粒子の行き来もあるものとし、粒子の化学ポテンシャルを μ と書く。系と熱浴は同一種の粒子からなり、粒子間の相互作用は無視できるものとする。系の粒子は様々な量子状態 j を取ることができ、n 個の粒子が量子状態 j を占める確率 $P_j(n)$ は

$$P_j(n) = A \exp[-\beta(\epsilon_j - \mu)n]$$

で与えられるものとする。ここで、$\beta = (k_\mathrm{B}T)^{-1}$ で k_B はボルツマン定数、$\epsilon_j(\geq 0)$ は量子状態 j のエネルギーレベル、A は比例定数である。このとき以下の問いに答えよ。

問 1. ボーズ粒子とフェルミ粒子について、量子状態 j の占有の仕方の違いを簡単に述べよ。

問 2. フェルミ粒子について、量子状態 j を占める粒子数の平均値 $\bar{n}(\epsilon_j)$ を求めて、β、ϵ_j、μ を用いて表せ。

問 3. フェルミ粒子について、温度 T がゼロに十分近いとき $\bar{n}(\epsilon_j)$ は ϵ_j の関数としてどのように振る舞うか模式図を描け。

問 4. 温度 T がゼロの非相対論的なフェルミ粒子の系について、粒子の化学ポテンシャル μ を近似的に求め、系の平均粒子数 $\bar{N}$ と系の体積 V を使って表せ。ただし粒子の量子状態 j の分布が十分稠密であるとして、状態についての和を

$$\bar{N} = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{n}(\epsilon_j) \to \bar{N} = \int \bar{n}\left(\epsilon(\vec{p})\right) gV d^3\vec{p}/h^3$$

と積分で置き換えられるものとする。ここで、h はプランク定数、$\vec{p}$ は粒子の運動量ベクトル、g はエネルギーレベルの多重度である。粒子の質量を m とする。

問 5. 高温で希薄な気体の系について、$-\beta\mu \gg 1$ の条件のもとで近似的に $\bar{N}$ を計算せよ。さらに、気体粒子の化学ポテンシャル μ を求め、$\bar{N}$、β、V を用いて表せ。

物 理（3）

問 1. 下に与えたマックスウェル方程式から、微分形での電荷の保存を表す式を導け。

問 2. 完全導体内部では、$\vec{E} = \vec{0}$ かつ $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ でなければならない。その理由をのべよ。

問 3. 図 1 で示されているように、無限長のパイプ A(内径 a) と無限長の棒 B(半径 b) が軸が一致するように配置されている。それぞれは完全導体でできている。AB 間の空間 C は真空である。また、電磁波の伝播に起因しない電場、磁場、電荷、電流は存在しないとする。以下、円柱座標を用いて考察する。

(a) 空間 C を z 軸の正の方向に伝わる電磁波の E_r、B_θ をマックスウェル方程式を解いて求めよ。ただし、$E_\theta = E_z = B_r = B_z = 0$ とし、$E_r = E_{r0}(r,\theta)\exp[-i\omega t + ikz]$、$B_\theta = B_{\theta 0}(r,\theta)\exp[-i\omega t + ikz]$ とせよ。ここで $\omega > 0$。

(b) (a) で求めた解について、パイプ A と棒 B の単位長さあたりの電荷と、電流を求めよ。

(c) 完全導体と真空領域の境界面で $\vec{E}$、$\vec{B}$ が満たすべき境界条件を求めよ。また、(a) で求めた解がこの境界条件を満たす事を示せ。

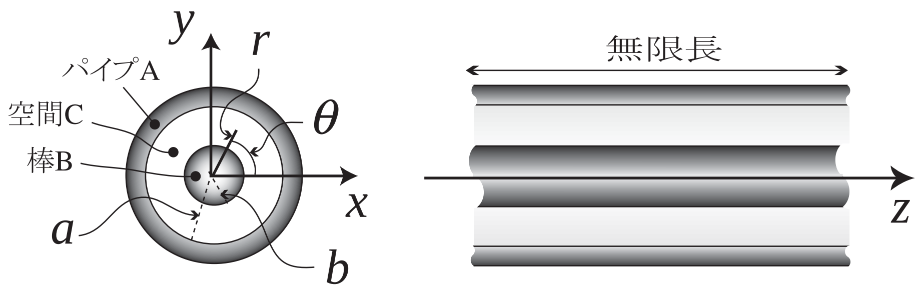

図 1: 左は縦断面図、右は横断面図。座標系は右手系を採用。

- 一様媒質中のマックスウェル方程式 (MKSA 単位系)

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{B} = \vec{j} + \epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$\vec{E}$、$\vec{B}$ はそれぞれ電場、磁場ベクトル、ϵ, μ は一様媒質の誘電率 (真空では ϵ_0)、透磁率 (真空では μ_0)、ρ、$\vec{j}$ は電荷密度、電流密度ベクトル。電気伝導度 σ の導体中ではオームの法則 $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ が成り立つ。完全導体では $\sigma = \infty$。

- 円柱座標でのベクトル解析

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z},\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

物 理（4）

問 1. 質量 m の粒子がポテンシャル $U(\vec{x})$ の中を運動している。このとき規格化された波動関数 ψ は次のシュレディンガー方程式を満たす。

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{x})\right]\psi$$

ここで $\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数)。このとき、以下の問いに答よ。

(a) 粒子の位置 $\vec{x}$ の平均値 $\langle\vec{x}\rangle$ が次の式を満たすことを示せ。

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\vec{x}\rangle = -\left\langle\frac{\partial U}{\partial\vec{x}}\right\rangle$$

(b) (a) の式と古典粒子の運動方程式は、どのような条件の下で同等になるか。

問 2. 不確定性関係 $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ を用いて基底状態にある水素原子の広がりとエネルギーを概算せよ。答は電子の質量 m と電荷 e、$\hbar$ で表せ。

問 3. 二つの状態 a、b をもつ系を考える。状態 a、b の固有関数をそれぞれ

$$\psi_{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}、\quad \psi_{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。一般の状態の波動関数はこれらの関数の重ね合わせで書ける。

$$\psi(t) = C_{\mathrm{a}}(t)\psi_{\mathrm{a}} + C_{\mathrm{b}}(t)\psi_{\mathrm{b}}$$

また、この系のハミルトニアンが次の形に与えられている。

$$H = \begin{pmatrix} E & -A \\ -A & E \end{pmatrix}$$

E、A は定数である。このとき以下の問いに答よ。

(a) C_{a} と C_{b} の従う式を書け。

(b) 最初 $(t = 0)$ に系が状態 a にあったとき、時刻 t に系が状態 b にある確率を計算せよ。