

10 Report ?. (presented by Sho Nakamura)

update:9/May/2011

[?] 実際に観測される Stokes parameters

任意の方向 $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ から飛来する無偏光電磁波の原点に存在する電子による散乱を考える。観測者の視線方向 \mathbf{n}' を z 軸にとる。

?-1. 入射光の偏光成分を進行方向 $-\mathbf{n}$ と視線方向 z 軸が作る平面 (コレを入射平面と呼ぶ) 内の成分とその平面に垂直な成分の 2 成分に分離し、それぞれの偏光ベクトルを ϵ_1, ϵ_2 とする。

$$\epsilon_1 = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad (1)$$

$$\epsilon_2 = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (2)$$

を示せ。

?-2. 同様に散乱波の偏光成分を入射平面内の成分とそれに垂直な成分に分離し、それぞれの偏光ベクトルを ϵ'_1, ϵ'_2 とする。

$$\epsilon'_1 = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \quad (3)$$

$$\epsilon'_2 = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (4)$$

を示せ。

?-3. 入射波の偏光ベクトルが一般の方向を向いた ϵ_{in} で、その散乱波の偏光ベクトルが ϵ_{out} のとき、Thomson 散乱の微分散乱断面積が

$$\frac{d\sigma(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega'} = r_0^2 (\epsilon_{in} \cdot \epsilon_{out})^2 \quad (5)$$

を示せ。 r_0 は古典電子半径、さらにここでは text(3.3) 式を用いても構わない。

?-4. 入射フラックスを $S/2$ 、偏光ベクトル ϵ_1 の入射波の散乱波の x 成分 y 成分の強度がそれぞれ

$$\frac{dP_x^{(1)}(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega'} = \frac{S}{2} r_0^2 (\epsilon_1 \cdot \mathbf{e}_x)^2 \quad (6)$$

$$\frac{dP_y^{(1)}(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega'} = \frac{S}{2} r_0^2 (\epsilon_1 \cdot \mathbf{e}_y)^2 \quad (7)$$

と書けることを示せ。ここで $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ はそれぞれ x, y 方向の単位ベクトルである。同様に入射フラックスを $S/2$ 、偏光ベクトルが ϵ_2 の入射波に対して

$$\frac{dP_x^{(2)}(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega'} = \frac{S}{2} r_0^2 (\epsilon_2 \cdot \mathbf{e}_x)^2 \quad (8)$$

$$\frac{dP_y^{(2)}(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega'} = \frac{S}{2} r_0^2 (\epsilon_2 \cdot \mathbf{e}_y)^2 \quad (9)$$

となることを示せ。

?-5. 入射波が無偏光のとき、散乱波の Stokes parameter Q, U がそれぞれ

$$Q(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = \frac{S}{2} r_0^2 [(\epsilon_1 \cdot \mathbf{e}_x)^2 + (\epsilon_2 \cdot \mathbf{e}_x)^2 - (\epsilon_1 \cdot \mathbf{e}_y)^2 - (\epsilon_2 \cdot \mathbf{e}_y)^2] \quad (10)$$

$$U(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = \frac{S}{2} r_0^2 [(\epsilon_1 \cdot \mathbf{e}_x)(\epsilon_1 \cdot \mathbf{e}_y) + (\epsilon_2 \cdot \mathbf{e}_x)(\epsilon_2 \cdot \mathbf{e}_y)] \quad (11)$$

ここで入射波の2つの独立な偏光成分の入射フラックスがそれぞれ $S/2$ であるとした。

?-6. \mathbf{n} の方向から飛来する入射電磁波の強度が $S(\mathbf{n})$ で与えられるとき、観測される Q, U がそれぞれ

$$Q(\mathbf{n}') = - \int_{4\pi} \frac{S(\mathbf{n})}{2} r_0^2 (1 - \cos^2 \theta) \cos 2\phi \, d\Omega \quad (12)$$

$$U(\mathbf{n}') = - \int_{4\pi} \frac{S(\mathbf{n})}{2} r_0^2 (1 - \cos^2 \theta) \sin 2\phi \, d\Omega \quad (13)$$

[?]

任意の方向 $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ から飛来する無偏光電磁波の原点に存在する電子による散乱を考えよう。観測者は z 軸上にいるとする、すなわち観測者に向かって飛んでくる電磁波の進行方向単位ベクトルは $\mathbf{n}' = \mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ とする。

?-1.

入射光の偏光成分を、進行方向 $-\mathbf{n}$ と視線方向 z 軸とが作る平面内 (以下、これを入射平面と呼ぶ) の成分とその平面に垂直な成分の2成分に分離し、それぞれの偏光ベクトルを ϵ_1, ϵ_2 とする。これらはどのような成分で書かれるだろうか。

簡単な方から求めよう。入射平面に垂直なベクトル ϵ_2 は \mathbf{e}_x を $\phi + \pi/2$ だけ z 軸周りに回転させればよい。

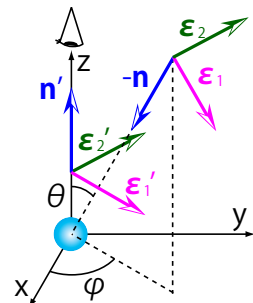


fig 1: 座標設定。

$$\epsilon_2 = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \pi/2) & -\sin(\phi + \pi/2) & 0 \\ \sin(\phi + \pi/2) & \cos(\phi + \pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

次に入射平面内の偏光ベクトルを求める。3次元的な Imagination を駆使すると、まず \mathbf{e}_z を x 軸の周りに $\theta + \pi/2$ 、それをさらに z 軸の周りに $\phi + \pi/2$ だけ回転させればよいことがわかる。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \begin{pmatrix} \cos(\phi + \pi/2) & -\sin(\phi + \pi/2) & 0 \\ \sin(\phi + \pi/2) & \cos(\phi + \pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta + \pi/2) & -\sin(\theta + \pi/2) \\ 0 & \sin(\theta + \pi/2) & \cos(\theta + \pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

?-2.

同様に散乱波の偏光成分を入射平面内の成分とそれに垂直な成分に分離し、それぞれの偏光ベクトルを ϵ'_1, ϵ'_2 とする。前問と同様にこれらを成分で書いてみよう。今度は簡単である。 ϵ'_1 は e_x を z 軸の周りに ϕ 回転させたもの、 ϵ'_2 は e_x を z 軸の周りに $\phi + \pi/2$ 回転させたものであるから

$$\epsilon'_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\epsilon'_2 = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \pi/2) & -\sin(\phi + \pi/2) & 0 \\ \sin(\phi + \pi/2) & \cos(\phi + \pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

?-3.

入射波の偏光ベクトルが一般の方向を向いた ϵ_{in} でありその散乱波の偏光ベクトルが ϵ_{out} のとき、Thomson 散乱の微分散乱断面積がどうなるだろうか。

以前求めた直線偏光が入射した場合の Thomson 散乱の微分散乱断面積は

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sin^2 \Theta$$

であった。

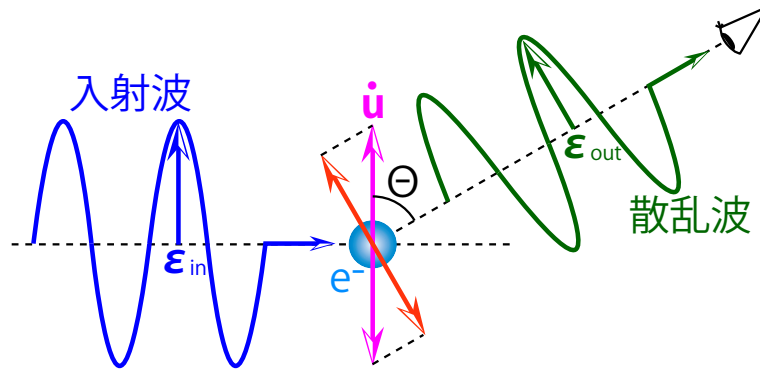


fig 2: Thomson 散乱の微分散乱断面積の物理的理解。

$\sin \Theta$ は fig2 を見ればわかるように、観測者は電子の振動を Θ 方向に射影されたものしか見ることができないことからきている。 ϵ_{in} の直線偏光電磁波が入射すると、電子は ϵ_{in} と同じ方向に加速を受ける (すなわち $\dot{\mathbf{u}} \parallel \epsilon_{in}$)。そして実際に観測される電磁波の偏光ベクトルは ϵ_{out} である。fig2 より

$$\epsilon_{in} \cdot \epsilon_{out} = \cos(\pi/2 - \Theta) = \sin \Theta$$

$$\therefore \frac{d\sigma(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 (\epsilon_{in} \cdot \epsilon_{out})^2 = r_0^2 (\epsilon_{in} \cdot \epsilon_{out})^2 \quad (18)$$

また $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \sim 3$ (fm) は古典電子半径である。

?-4.

入射電磁波の flux が $S/2$ で偏光ベクトルが $\epsilon_{in} = \epsilon_1$ のとき、散乱波の x, y 成分の強度はそれぞれどのように書けるか。
?-3 で考えたように、 ϵ_{in} の直線偏光電磁波が入射したとき、 ϵ_{out} 方向の微分散乱断面は (18) 式のように ϵ_{in} と ϵ_{out} の内積の形で書けるのであった。また入射電磁波の flux と散乱後の電磁波の放射強度は

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \langle S \rangle \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (19)$$

のような関係にあるのであった。これを両辺を $\hbar\omega$ で割り、 $d\Omega$ をかければ理解しやすい (これにより左辺は $d\Omega$ 方向に散乱される光子数、右辺は微小面積 $d\sigma$ に入射してくる光子数と考えることができる)。これより

$$\frac{dP(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} = \frac{S}{2} r_0^2 (\epsilon_{in} \cdot \epsilon_{out})^2$$

この式は偏光ベクトルが ϵ_{in} で入射してきた電磁波が散乱され、偏光ベクトルが ϵ_{out} となって観測者のもとに届いた放射強度である。また放射強度が

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} [R^2 E^2] = \frac{c}{4\pi} [R^2 (E_x^2 + E_y^2)] = \frac{c}{4\pi} [R^2 \{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_x)^2 + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_y)^2\}] \quad (20)$$

のように書けたことを思い出せば、結局のところ散乱波の x, y 成分というのは $\epsilon_{out} = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ と置き換えたものに等しいことがわかる。

$$\therefore \begin{cases} \frac{dP_x^{(1)}(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} = \frac{S}{2} r_0^2 (\epsilon_1 \cdot \mathbf{e}_x)^2 \\ \frac{dP_y^{(1)}(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} = \frac{S}{2} r_0^2 (\epsilon_1 \cdot \mathbf{e}_y)^2 \end{cases} \quad (21)$$

同様の考え方で、 $\epsilon_{in} = \epsilon_2$ のときも

$$\begin{cases} \frac{dP_x^{(2)}(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} = \frac{S}{2} r_0^2 (\epsilon_2 \cdot \mathbf{e}_x)^2 \\ \frac{dP_y^{(2)}(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} = \frac{S}{2} r_0^2 (\epsilon_2 \cdot \mathbf{e}_y)^2 \end{cases} \quad (22)$$

である。

?-5.

今までのことを用いて、入射波が無偏光のときの散乱波の単位時間・単位立体角あたりの Stokes parameters Q, U を求めたい。そのために理解しておきたいのはいままで扱ってきた Stokes parameters との次元の違いである。

今まで使っていた Stokes parameters に 0 の添字をつけると $I_0 = E_x^2 + E_y^2$ は単位体積あたりのエネルギーの次元である。 I_0 に限らず、ほかの parameter もそうなっている。しかし今回扱っているのは放射強度であり、ここから Stokes parameters を求めるには単位時間・単位立体角あたりの次元にしなくてはならない。よって (20) 式より

$$\frac{dI(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} \equiv \frac{c}{4\pi} R^2 I_0 = \frac{c}{4\pi} R^2 (E_x^2 + E_y^2) = \frac{dP_x}{d\Omega} + \frac{dP_y}{d\Omega} \quad (23)$$

同様に

$$\frac{dQ(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} R^2 Q_0 = \frac{c}{4\pi} R^2 (E_x^2 - E_y^2) = \frac{dP_x}{d\Omega} - \frac{dP_y}{d\Omega} \quad (24)$$

$$\frac{dU(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} R^2 U_0 = \frac{c}{4\pi} R^2 \cdot 2E_x E_y \underbrace{\cos \delta}_{\sim 1} = 2\sqrt{\frac{dP_x}{d\Omega}} \sqrt{\frac{dP_y}{d\Omega}} \quad (25)$$

途中、今は無偏光電磁波を考えると $\cos \delta \sim 1$ とした (前問参照)。 (21) ~ (25) 式より

$$\begin{aligned} \frac{dQ(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} &= \frac{dQ^{(1)}(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} + \frac{dQ^{(2)}(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} = \left\{ \frac{S}{2} r_0^2 (\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_x)^2 - \frac{S}{2} r_0^2 (\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_y)^2 \right\} + \left\{ \frac{S}{2} r_0^2 (\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_x)^2 - \frac{S}{2} r_0^2 (\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_y)^2 \right\} \\ &= \frac{S}{2} r_0^2 \{ (\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_x)^2 + (\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_x)^2 - (\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_y)^2 - (\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_y)^2 \} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} &= \frac{dU^{(1)}(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} + \frac{dU^{(2)}(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} = 2 \left\{ \sqrt{\frac{S}{2} r_0^2 (\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_x)^2} \sqrt{\frac{S}{2} r_0^2 (\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_y)^2} \right\} + 2 \left\{ \sqrt{\frac{S}{2} r_0^2 (\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_x)^2} \sqrt{\frac{S}{2} r_0^2 (\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_y)^2} \right\} \\ &= \frac{S}{2} r_0^2 \cdot 2 \{ (\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_x)(\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_y) + (\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_x)(\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_y) \} \end{aligned} \quad (27)$$

ただし、これは入射波の 2 つの独立な偏光成分の入射 flux がそれぞれ $S/2$ であるとしている。

?-6.

\mathbf{n} 方向から飛来する入射電磁波の強度が $S(\mathbf{n})$ で与えられるとき、観測される $Q(\mathbf{n}')$, $U(\mathbf{n}')$ はどうなるか。

(26), (27) 式の内積部分を具体的に計算してみる。(14), (15) 式より

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_x = \cos \theta \cos \phi, \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_x = -\sin \phi, \quad \boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_y = \cos \theta \sin \phi, \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_y = \cos \phi$$

これらを代入すればよい。

$$\begin{aligned} \frac{dQ(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} &= \frac{S}{2} r_0^2 (\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi - \cos^2 \theta \sin^2 \phi - \cos^2 \phi) = \frac{S}{2} r_0^2 \{ \cos^2 \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) - (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \} \\ &= -\frac{S}{2} r_0^2 (1 - \cos^2 \theta) \cos 2\phi \end{aligned}$$

$$\frac{dU(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{d\Omega} = \frac{S}{2} r_0^2 \cdot 2 (\cos \theta \cos \phi \cos \theta \sin \phi - \sin \phi \cos \phi) = \frac{S}{2} r_0^2 \cdot 2 \sin \phi \cos \phi (\cos^2 \theta - 1) = -\frac{S}{2} r_0^2 (1 - \cos^2 \theta) \sin 2\phi$$

$$\therefore Q(\mathbf{n}') = - \int_{4\pi} \frac{S(\mathbf{n})}{2} r_0^2 (1 - \cos^2 \theta) \cos 2\phi \, d\Omega \quad (28)$$

$$\therefore U(\mathbf{n}') = - \int_{4\pi} \frac{S(\mathbf{n})}{2} r_0^2 (1 - \cos^2 \theta) \sin 2\phi \, d\Omega \quad (29)$$