極座標での運動量保存系式

update: 2017 July 28, author: Sho K. NAKAMURA

テンソルの微分を座標変換

デカルト座標系において、磁気流体の運動方程式を運動量保存式の形に書き換えると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \nabla_j \left[\left(P + \frac{1}{8\pi} B^2 \right) \delta_i^j + \rho v^i v^j - \frac{1}{4\pi} B^i B^j \right] = F^i \tag{1}$$

のようになる。v^i, B^i はそれぞれ流体の速度と磁場の i 成分、$p_{\rm gas}$ はガス圧、ρ はガスの質量密度、F^i は外力の i 成分である。左辺第二項は momentum flux tensor で

$$\pi^{ij} \equiv \underbrace{\left(p_{\rm gas} + \frac{1}{8\pi} B^2 \right)}_{\equiv p_{\rm tot}} \delta_i^j + \rho v^i v^j - \frac{1}{4\pi} B^i B^j \tag{2}$$

である。(**??**) 式を極座標系の場合に書き換えよう。そのためには (**??**) 式をより一般的に、共変微分 ∇_μ と energy-momentum tensor $T^{\mu\nu}$ を用いて

$$\nabla_\mu T^{i\mu} = \nabla_0 T^{i0} + \nabla_j \pi^{ij} = F^i \tag{3}$$

のように書く。つまり一般座標変換に対して共変な形で表現するのである。極座標系では T^{i0} は

$$T^{i0} = (\rho \dot{r}, \rho \dot{\theta}, \rho \dot{\varphi}) = (\rho v_r, \rho \frac{v_\theta}{r}, \rho \frac{v_\varphi}{r \sin\theta}) \tag{4}$$

である。π^{ij} は energy-momentum tensor の空間部分で、デカルト座標系での具体的な成分は

$$(\pi^{ij}) = \begin{pmatrix} p_{\rm tot} + \rho v_x^2 - \frac{1}{4\pi} B_x^2 & \rho v_x v_y - \frac{1}{4\pi} B_x B_y & \rho v_x v_z - \frac{1}{4\pi} B_x B_z \\ \rho v_y v_x - \frac{1}{4\pi} B_y B_x & p_{\rm tot} + \rho v_y^2 - \frac{1}{4\pi} B_y^2 & \rho v_y v_z - \frac{1}{4\pi} B_y B_z \\ \rho v_z v_x - \frac{1}{4\pi} B_z B_x & \rho v_z v_y - \frac{1}{4\pi} B_z B_y & p_{\rm tot} + \rho v_z^2 - \frac{1}{4\pi} B_z^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \pi^{xx} & \pi^{xy} & \pi^{xz} \\ \pi^{yx} & \pi^{yy} & \pi^{yz} \\ \pi^{zx} & \pi^{zy} & \pi^{zz} \end{pmatrix} \tag{5}$$

である。デカルト座標系 (x, y, z) から極座標 (r, θ, φ) に移ったとき、行列 (π^{ij}) の成分も変化するが、その成分も同様に $\pi^{rr}, \pi^{\theta\varphi}, \pi^{r\varphi}$ のように書く。
デカルト座標で $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z), \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ と書かれるベクトルを極座標 (r, θ, φ) の成分に書き換えると

$$\begin{cases} v_r = v_x \sin\theta \cos\varphi + v_y \sin\theta \sin\varphi + v_z \cos\theta \\ v_\theta = v_x \cos\theta \cos\varphi + v_y \cos\theta \sin\varphi - v_z \sin\theta \\ v_\varphi = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} B_r = B_x \sin\theta \cos\varphi + B_y \sin\theta \sin\varphi + B_z \cos\theta \\ B_\theta = B_x \cos\theta \cos\varphi + B_y \cos\theta \sin\varphi - B_z \sin\theta \\ B_\varphi = -B_x \sin\varphi + B_y \cos\varphi \end{cases} \tag{6}$$

などである。円筒座標での π^{ij} を求める前に以下の量を計算しておこう。(x, y, z) と (r, θ, φ) は

$$
\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = r^2 \\ \tan^2\theta = \dfrac{x^2+y^2}{z^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{7}
$$

のような関係がある。これより

$$
2x = 2r\frac{\partial r}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi \tag{8}
$$

$$
2y = 2r\frac{\partial r}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\varphi \tag{9}
$$

$$
2z = 2r\frac{\partial r}{\partial z} \Longrightarrow \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\theta \tag{10}
$$

$$
\frac{2\tan\theta}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{2x}{z^2} \Longrightarrow \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} \tag{11}
$$

$$
\frac{2\tan\theta}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{2y}{z^2} \Longrightarrow \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} \tag{12}
$$

$$
\frac{2\tan\theta}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = -2\frac{x^2+y^2}{z^2}\frac{1}{z} \Longrightarrow \frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r} \tag{13}
$$

$$
\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} = -\frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi} \Longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} \tag{14}
$$

$$
\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{r\sin\theta\cos\varphi} \Longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \tag{15}
$$

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \tag{16}
$$

のようにヤコビアンが求まる。では具体的に π を (r,θ,φ) の系の形に書き直そう。

$$
\begin{aligned}
\pi^{rr} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}\pi^{xx} + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\pi^{xy} + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}\pi^{xz} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}\pi^{yx} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y}\pi^{yy} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}\pi^{yz} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial x}\pi^{zx} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial y}\pi^{zy} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial z}\pi^{zz} \\
&\underbrace{=}_{(\mathbf{??})} (p_{\mathrm{tot}} + \rho v_x^2 - \frac{1}{4\pi}B_x^2)\sin^2\theta\cos^2\varphi + (\rho v_x v_y - \frac{1}{4\pi}B_x B_y)\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + (\rho v_x v_z - \frac{1}{4\pi}B_x B_z)\sin\theta\cos\theta\sin\varphi \\
&\quad +(\rho v_y v_x - \frac{1}{4\pi}B_y B_x)\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + (p_{\mathrm{tot}} + \rho v_y^2 - \frac{1}{4\pi}B_y^2)\sin^2\theta\sin^2\varphi + (\rho v_y v_z - \frac{1}{4\pi}B_y B_z)\sin\theta\cos\theta\sin\varphi \\
&\quad +(\rho v_z v_x - \frac{1}{4\pi}B_z B_x)\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + (\rho v_z v_y - \frac{1}{4\pi}B_z B_y)\sin\theta\cos\theta\sin\varphi + (p_{\mathrm{tot}} + \rho v_z^2 - \frac{1}{4\pi}B_z^2)\cos^2\theta \\
&= p_{\mathrm{tot}} + \rho v_r^2 - \frac{1}{4\pi}B_r^2
\end{aligned} \tag{17}
$$

途中、(**??**) 式から v_r^2, B_r^2 の計算を行うことでこのようにまとまる。

$$
\begin{aligned}
\pi^{r\theta} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x}\pi^{xx} + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y}\pi^{xy} + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial z}\pi^{xz} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial x}\pi^{yx} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial y}\pi^{yy} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial z}\pi^{yz} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial \theta}{\partial x}\pi^{zx} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial \theta}{\partial y}\pi^{zy} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial \theta}{\partial z}\pi^{zz} \\
&\underbrace{=}_{(\mathbf{??})} (p_{\mathrm{tot}} + \rho v_x^2 - \frac{1}{4\pi}B_x^2)\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi}{r} + (\rho v_x v_y - \frac{1}{4\pi}B_x B_y)\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r} - (\rho v_x v_z - \frac{1}{4\pi}B_x B_z)\frac{\sin^2\theta\cos\varphi}{r} \\
&\quad +(\rho v_y v_x - \frac{1}{4\pi}B_y B_x)\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r} + (p_{\mathrm{tot}} + \rho v_y^2 - \frac{1}{4\pi}B_y^2)\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi}{r} - (\rho v_y v_z - \frac{1}{4\pi}B_y B_z)\frac{\sin^2\theta\sin\varphi}{r} \\
&\quad +(\rho v_z v_x - \frac{1}{4\pi}B_z B_x)\frac{\cos^2\theta\cos\varphi}{r} + (\rho v_z v_y - \frac{1}{4\pi}B_z B_y)\frac{\cos^2\theta\sin\varphi}{r} - (p_{\mathrm{tot}} + \rho v_z^2 - B_z^2)\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}
\end{aligned} \tag{18}
$$

以下、$\rho v_i v_j$ の項のみをまとめて考えていこう。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\rho v_x(v_x\sin\theta\cos\varphi + v_y\sin\theta\sin\varphi + v_z\cos\theta) + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\rho v_y(v_x\sin\theta\cos\varphi + v_y\sin\theta\sin\varphi + v_z\cos\theta) \\
&\qquad -\frac{\sin\theta}{r}\rho v_z(v_x\sin\theta\cos\varphi + v_y\sin\theta\sin\varphi + v_z\cos\theta) \\
&= \frac{1}{r}\rho v_r(v_x\cos\theta\cos\varphi + v_y\cos\theta\sin\varphi - v_z\sin\theta) = \frac{1}{r}\rho v_r v_\theta
\end{aligned}
$$

$B_i B_j$ の項はこれと逆符号である。そして示すまでもなく p_{tot} の項は係数が 0 となるので、

$$
\pi^{r\theta} = \frac{1}{r}(\rho v_r v_\theta - \frac{1}{4\pi}B_r B_\theta) \tag{19}
$$

とまとまる。

$$
\begin{aligned}
\pi^{r\varphi} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\pi^{xx} + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\pi^{xy} + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\pi^{xz} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\pi^{yx} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\pi^{yy} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\pi^{yz} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\pi^{zx} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\pi^{zy} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\pi^{zz} \\
&= -(p_{\mathrm{tot}} + \rho v_x^2 - \frac{1}{4\pi}B_x^2)\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r} + (\rho v_x v_y - \frac{1}{4\pi}B_x B_y)\frac{\cos^2\varphi}{r} + 0 \\
&\quad -(\rho v_y v_x - \frac{1}{4\pi}B_y B_x)\frac{\sin^2\varphi}{r} + (p_{\mathrm{tot}} + \rho v_y^2 - \frac{1}{4\pi}B_y^2)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + 0 \\
&\quad -(\rho v_z v_x - \frac{1}{4\pi}B_z B_x)\frac{\cot\theta\sin\varphi}{r} + (\rho v_z v_y - \frac{1}{4\pi}B_z B_y)\frac{\cot\theta\cos\varphi}{r} + 0
\end{aligned} \tag{20}
$$

以下、$\rho v_i v_j$ の項のみをまとめて考えていこう。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos\varphi}{r}\rho v_x(v_x\sin\varphi - v_y\cos\varphi) - \frac{\sin\varphi}{r}\rho v_y(v_x\sin\varphi - v_y\cos\varphi) - \frac{\cot\theta}{r}\rho v_z(v_x\sin\varphi - v_y\cos\varphi) \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\rho v_\varphi(v_x\sin\theta\cos\varphi + v_y\sin\theta\sin\varphi + v_z\cos\theta) = \frac{1}{r\sin\theta}\rho v_r v_\varphi
\end{aligned}
$$

$B_i B_j$ の項はこれと逆符号である。そして示すまでもなく p_{tot} の項は係数が 0 となるので、

$$
\pi^{r\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}(\rho v_r v_\varphi - \frac{1}{4\pi}B_r B_\varphi) \tag{21}
$$

とまとまる。以下同様に $\pi^{\varphi\varphi}, \pi^{\varphi\theta}, \pi^{\theta\theta}$ を計算する。

$$\pi^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}(p_{\rm tot} + \rho v_\theta^2 - \frac{1}{4\pi}B_\theta^2) \tag{22}$$

$$\pi^{\theta\varphi} = \frac{1}{r^2\sin\theta}(\rho v_\theta v_\varphi - \frac{1}{4\pi}B_\theta B_\varphi) \tag{23}$$

$$\pi^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(p_{\rm tot} + \rho v_\varphi^2 - \frac{1}{4\pi}B_\varphi^2) \tag{24}$$

以上をまとめて

$$\begin{pmatrix} \pi^{rr} & \pi^{r\theta} & \pi^{r\varphi} \\ \pi^{\theta r} & \pi^{\theta\theta} & \pi^{\theta\varphi} \\ \pi^{\varphi r} & \pi^{\varphi\theta} & \pi^{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{\rm tot} + \rho v_r^2 - \frac{1}{4\pi}B_r^2 & \frac{1}{r}\left(\rho v_r v_\theta - \frac{1}{4\pi}B_r B_\theta\right) & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\rho v_r v_\varphi - \frac{1}{4\pi}B_r B_\varphi\right) \\ \frac{1}{r}\left(\rho v_\theta v_r - \frac{1}{4\pi}B_\theta B_r\right) & \frac{1}{r^2}\left(p_{\rm tot} + \rho v_\theta^2 - \frac{1}{4\pi}B_\theta^2\right) & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\rho v_\theta v_\varphi - \frac{1}{4\pi}B_\theta B_\varphi\right) \\ \frac{1}{r\sin\theta}\left(\rho v_\varphi v_r - \frac{1}{4\pi}B_\varphi B_r\right) & \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\rho v_\varphi v_\theta - \frac{1}{4\pi}B_\varphi B_\theta\right) & \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(p_{\rm tot} + \rho v_\varphi^2 - \frac{1}{4\pi}B_\varphi^2\right) \end{pmatrix} \tag{25}$$

のように書く。
さて、これを用いて運動量保存式を計算してやればよい … わけだが、実は運動量保存式に現れている divergence は vector の divergence ではなく tensor の divergence である。よって、これは一般相対論でよく見かけるように共変微分で考えなくてはならない。ゆえに正しくは

$$\nabla_0 T^{i0} + \nabla_j \pi^{ij} = \frac{\partial}{\partial t}T^{i0} + \left(\partial_j \pi^{ij} + \Gamma^i_{\ell j}\pi^{\ell j} + \Gamma^j_{\ell j}\pi^{i\ell}\right) = F^i \tag{26}$$

である。第一項の共変微分をただの時間偏微分にしたのは、今の場合には座標基底が時間に依存しないためである[1]。ここで Γ は座標 metric で定義される Christoffel symbol

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{i\ell}(g_{\ell j,k} + g_{\ell k,j} - g_{jk,\ell}) \tag{27}$$

極座標の metric は

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} ,\ (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{28}$$

より、その成分の微分は

$$g_{\theta\theta,r} = 2r \tag{29}$$

$$g_{\varphi\varphi,r} = 2r\sin^2\theta \tag{30}$$

[1] 具体的に Christoffel symbol を計算してもよい。結局時間に関係する Christoffel symbol は全て 0 である。

$$g_{\varphi\varphi,\theta} = 2r\sin\theta\cos\theta \tag{31}$$

以外は 0 である。では Christoffel symbol を具体的に計算していこう。

$$i = r \implies \Gamma^r_{jk} = \frac{1}{2}g^{r\ell}(g_{\ell j,k} + g_{\ell k,j} - g_{jk,\ell}) \underbrace{=}_{\ell=r\ \text{only}} \frac{1}{2}\cdot 1(\underbrace{g_{rj,k}}_{=0} + \underbrace{g_{rk,j}}_{=0} - g_{jk,r})$$

$$\therefore \Gamma^r_{\theta\theta} = -r,\ \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta \tag{32}$$

$$i = \theta \implies \Gamma^\theta_{jk} = \frac{1}{2}g^{\theta\ell}(g_{\ell j,k} + g_{\ell k,j} - g_{jk,\ell}) \underbrace{=}_{\ell=\theta\ \text{only}} \frac{1}{2r^2}(g_{\theta j,k} + g_{\theta k,j} - g_{jk,\theta})$$

$$\therefore \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = -\frac{1}{r},\ \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta \tag{33}$$

$$i = \varphi \implies \Gamma^\varphi_{jk} = \frac{1}{2}g^{\varphi\ell}(g_{\ell j,k} + g_{\ell k,j} - g_{jk,\ell}) \underbrace{=}_{\ell=\varphi\ \text{only}} \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}(g_{\varphi j,k} + g_{\varphi k,j})$$

$$\therefore \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r},\ \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{34}$$

これ以外は全て 0 である。
以上でお膳立ては全て終了した。(??), (??) と Christoffel symbol たちを用いて運動量保存式を表現しよう。

$\cdot i = r$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_r) + \frac{\partial}{\partial r}\pi^{rr} + \frac{\partial}{\partial\theta}\pi^{r\theta} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\pi^{r\varphi} + \Gamma^r_{\theta\theta}\pi^{\theta\theta} + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\pi^{\varphi\varphi} + \Gamma^\theta_{r\theta}\pi^{rr} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}\pi^{rr} + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\pi^{r\theta} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_r) + \frac{\partial}{\partial r}\left(p_{\rm tot} + \rho v_r^2 - B_r^2/4\pi\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{r}(\rho v_r v_\theta - B_r B_\theta/4\pi)\right\} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho v_r v_\varphi - B_r B_\varphi/4\pi) \\
&-r\frac{1}{r^2}(p_{\rm tot} + \rho v_\theta^2 - B_\theta^2/4\pi) - r\sin^2\theta\frac{1}{r^2\sin^2\theta}(p_{\rm tot} + \rho v_\varphi^2 - B_\varphi^2/4\pi) \\
&+\frac{1}{r}(p_{\rm tot} + \rho v_r^2 - B_r^2/4\pi) + \frac{1}{r}(p_{\rm tot} + \rho v_r^2 - B_r^2/4\pi) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{1}{r}(\rho v_r v_\theta - B_r B_\theta/4\pi) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_r) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2(p_{\rm tot} + \rho v_r^2 - B_r^2/4\pi)\right\} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta(\rho v_r v_\theta - B_r B_\theta/4\pi)\right\} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho v_r v_\varphi - B_r B_\varphi/4\pi) \\
&-\frac{1}{r}\left\{2p_{\rm tot} + \rho(v_\theta^2 + v_\varphi^2) - (B_\theta^2 + B_\varphi^2)/4\pi\right\}
\end{aligned} \tag{35}$$

r 方向の運動量保存式を divergence の形にまとめると、遠心力に相当する source term が出現する。$p_{\rm tot}$ の部分は実際に微分の部分を計算してみるとよい。$\partial p_{\rm tot}/\partial r$ という圧力勾配のみが残るように、source term の係数が 2 となっている。

$\cdot i = \theta$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\pi^{\theta r} + \frac{\partial}{\partial\theta}\pi^{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\pi^{\theta\varphi} + \Gamma^\theta_{\theta r}\pi^{\theta r} + \Gamma^\theta_{r\theta}\pi^{r\theta} + \Gamma^\theta_{r\theta}\pi^{\theta r} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}\pi^{\theta r} + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\pi^{\theta\theta} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}(\rho v_\theta v_r - B_\theta B_r/4\pi)\right\} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{r^2}(p_{\rm tot} + \rho v_\theta^2 - B_\theta^2/4\pi)\right\} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{1}{r^2\sin\theta}(\rho v_\theta v_\varphi - B_\theta B_\varphi/4\pi)\right\} \\
&+\frac{1}{r^2}(\rho v_\theta v_r - B_\theta B_r/4\pi) + \frac{1}{r^2}(\rho v_\theta v_r - B_\theta B_r/4\pi) + \frac{1}{r^2}(\rho v_\theta v_r - B_\theta B_r/4\pi) + \frac{1}{r^2}(\rho v_\theta v_r - B_\theta B_r/4\pi)
\end{aligned}$$

$$
+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}(p_{\rm tot}+\rho v_\theta^2-B_\theta^2)
$$

$$
=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho v_\theta v_r-B_\theta B_r/4\pi)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta(p_{\rm tot}+\rho v_\theta^2-B_\theta^2/4\pi)\right\}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho v_\theta v_\varphi-B_\theta B_\varphi/4\pi)
$$

$$
+\frac{3}{r^2}(\rho v_\theta v_r-B_\theta B_r/4\pi) \tag{36}
$$

さてここに現れた source term は意外な方法でひとまとめにすることができる。それはこの式を角運動量保存の式にしてしまうことである。唐突であるが $L_\varphi\equiv r\rho v_\theta$ として、以下の式を計算してみよう。

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2(L_\varphi v_r-rB_\theta B_r/4\pi)\right\}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2(r\rho v_\theta v_r-rB_\theta B_r/4\pi)\right\}=3(\rho v_\theta v_r-B_\theta B_r/4\pi)+r\frac{\partial}{\partial r}(\rho v_\theta v_r-B_\theta B_r/4\pi) \tag{37}
$$

この上式二つを見比べてやると

$$
\frac{\partial L_\varphi}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\{r^2(L_\varphi v_r-rB_\theta B_r/4\pi)\}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta(rp_{\rm tot}+L_\varphi v_\theta-rB_\theta^2/4\pi)\right\}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(L_\varphi v_\varphi-rB_\theta B_\varphi/4\pi) \tag{38}
$$

となる。

$\cdot i=\varphi$

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\pi^{\varphi r}+\frac{\partial}{\partial\theta}\pi^{\varphi\theta}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\pi^{\varphi\varphi}+\Gamma^\varphi_{r\varphi}\pi^{r\varphi}+\Gamma^\varphi_{\varphi r}\pi^{\varphi r}+\Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\pi^{\varphi\theta}+\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\pi^{\theta\varphi}+\Gamma^\theta_{r\theta}\pi^{\varphi r}+\Gamma^\varphi_{r\varphi}\pi^{\varphi r}+\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\pi^{\varphi\theta}
$$

$$
=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\varphi)
$$

$$
+\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r\sin\theta}(\rho v_\varphi v_r-B_\varphi B_r/4\pi)\right\}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{r^2\sin\theta}(\rho v_\varphi v_\theta-B_\varphi B_\theta/4\pi)\right\}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{1}{r^2\sin^2\theta}(p_{\rm tot}+\rho v_\varphi^2-B_\varphi^2/4\pi)\right\}
$$

$$
+\frac{4}{r^2\sin\theta}(\rho v_\varphi v_r-B_\varphi B_r/4\pi)+\frac{3\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}(\rho v_\varphi v_\theta-B_\varphi B_\theta/4\pi) \tag{39}
$$

全項に $r\sin\theta$ をかける。

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_\varphi)+r\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}(\rho v_\varphi v_r-B_\varphi B_r/4\pi)\right\}+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta}(\rho v_\varphi v_\theta-B_\varphi B_\theta/4\pi)\right\}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(p_{\rm tot}+\rho v_\varphi^2-B_\varphi^2/4\pi)
$$

$$
+\frac{4}{r}(\rho v_\varphi v_r-B_\varphi B_r/4\pi)+\frac{3\cos\theta}{r\sin\theta}(\rho v_\varphi v_\theta-B_\varphi B_\theta/4\pi) \tag{40}
$$

左から 3 項目と最後の項を整理すると

$$
\frac{\sin\theta}{r}(-1)\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(\rho v_\varphi v_\theta-B_\varphi B_\theta/4\pi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\varphi v_\theta-B_\varphi B_\theta)+\frac{3\cos\theta}{r\sin\theta}(\rho v_\varphi v_\theta-B_\varphi B_\theta/4\pi)
$$

$$
=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\varphi v_\theta-B_\varphi B_\theta)+\frac{2\cos\theta}{r\sin\theta}(\rho v_\varphi v_\theta-B_\varphi B_\theta/4\pi) \tag{41}
$$

これに $r\sin\theta$ をかけて整理すると

$$
\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho r v_\varphi v_\theta-rB_\varphi B_\theta/4\pi)+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}(\rho r v_\varphi v_\theta-rB_\theta B_\varphi/4\pi)=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\left\{\rho r v_\varphi\sin\theta v_\theta-rB_\varphi B_\theta\sin\theta/4\pi\right\}\right] \tag{42}
$$

のように一つにまとめることができる。同様に左から 2 項目と 5 項目も

$$
\begin{aligned}
&r\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}(\rho v_\varphi v_r - B_\varphi B_r/4\pi)\right\} + \frac{4}{r}(\rho v_\varphi v_r - B_\varphi B_r/4\pi) = \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_\varphi v_r - B_\varphi B_r/4\pi) + \frac{3}{r}(\rho v_\varphi v_r - B_\varphi B_r/4\pi) \\
&= \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2(\rho r v_\varphi v_r - rB_\varphi B_r/4\pi)\right\}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

よって、この式は $L_z \equiv \rho v_\varphi r\sin\theta$ として式をまとめれば見通しが良いことがわかる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L_z}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2(L_z v_r - r\sin\theta B_\varphi B_r/4\pi)\right\} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta(L_z v_\theta - r\sin\theta B_\varphi B_\theta/4\pi)\right\} \\
&+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\sin\theta p_{\mathrm{tot}} + L_z v_\varphi - r\sin\theta B_\varphi^2/4\pi)
\end{aligned}
\tag{44}
$$

以上をひとまとめに書いて、MHD simulation で役立つ式の形にしておこう。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho v_r \\ L_\varphi \\ L_z\end{pmatrix} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\begin{pmatrix} p_{\mathrm{tot}} + \rho v_r^2 - \dfrac{1}{4\pi}B_r^2 \\ L_\varphi v_r - \dfrac{r}{4\pi}B_\theta B_r \\ L_z v_r - \dfrac{r\sin\theta}{4\pi}B_\varphi B_r\end{pmatrix} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\begin{pmatrix}\rho v_r v_\theta - \dfrac{1}{4\pi}B_r B_\theta \\ r p_{\mathrm{tot}} + L_\varphi v_\theta - \dfrac{r}{4\pi}B_\theta^2 \\ L_z v_\theta - \dfrac{r\sin\theta}{4\pi}B_\varphi B_\theta\end{pmatrix} \\
&+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix}\rho v_r v_\varphi - \dfrac{1}{4\pi}B_r B_\varphi \\ L_\varphi v_\varphi - \dfrac{r}{4\pi}B_\theta B_\varphi \\ r\sin\theta p_{\mathrm{tot}} + L_z v_\varphi - \dfrac{r\sin\theta}{4\pi}B_\varphi^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{r}\left\{2p_{\mathrm{tot}} + \rho(v_\theta^2 + v_\varphi^2) - \dfrac{1}{4\pi}(B_\theta^2 + B_\varphi^2)\right\} + F_r \\ rF_\theta \\ r\sin\theta F_\varphi\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

となる。