generalized Ohm's law

update:09/Jan/2012, presented by Sho Nakamura

generalized Ohm's law(拡張されたオームの法則)

水素ガスが完全電離しているような系を考える。電子と陽子が従う運動方程式を書き出してみる。

$$m_e n_e \frac{D\mathbf{v}_e}{Dt} = -\nabla P_e - en_e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \frac{\mathbf{B}}{c}\right) - \frac{n_e m_e}{\tau_{ep}}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_p) \tag{1}$$

$$m_p n_p \frac{D\mathbf{v}_p}{Dt} = -\nabla P_p + en_p\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_p \times \frac{\mathbf{B}}{c}\right) + \frac{n_e m_e}{\tau_{ep}}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_p) \tag{2}$$

ここで $n_i, \mathbf{v}_i, P_i, \tau_{ij}$ はそれぞれ i 粒子の個数密度、速度、圧力、i 粒子と j 粒子が衝突するまでの時間 (運動量を交換するのにかかるおおよその時間) である。右辺第 3 項は、一個の電子が一個の陽子と一回の衝突で $m_e(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_p)$ だけ運動量を受け渡すことからくる、衝突項である。$m_e \ll m_p$、ほぼ完全電離した水素ガスを考えているので $n_e \simeq n_p = n$ として単位体積あたりの質量は

$$\rho \equiv m_e n_e + m_p n_p \simeq m_p n \tag{3}$$

また電子と陽子が混在した流体要素を考えると、その速度は流体要素のなかに含まれる電子と陽子の集団の重心の速度と考えることができるので

$$\mathbf{v} \equiv \frac{m_e n\mathbf{v}_e + m_p n\mathbf{v}_p}{m_e n + m_p n} \underbrace{=}_{(3)} \frac{m_e n\mathbf{v}_e + m_p n\mathbf{v}_p}{\rho} \tag{4}$$

(1) 式より $m_e \ll m_p$ として左辺の慣性項は無視すると

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{c} - \frac{1}{en}\nabla P_e - \frac{n}{e\tau_{ep}}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_p) \tag{5}$$

電流密度は

$$\mathbf{j} \equiv en(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_e) \tag{6}$$

と定義されるので

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}_e \times \frac{\mathbf{B}}{c} - \frac{1}{en}\nabla P_e - \frac{m_e}{e^2\tau_{ep}n}\mathbf{j} \tag{7}$$

これを拡張されたオームの法則という。また、$\mathbf{j}$ の前の係数

$$\sigma \equiv \frac{e^2\tau_{ep}n}{m_e} \tag{8}$$

を電気伝導度と定義する。
先に述べた通り $m_e \ll m_p$ より、運動量のほとんどは陽子によるものと考えると $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_p$ としても妥当である。$\mathbf{v}_e$ を $\mathbf{j}, \mathbf{v}$ を用いて書き表すと

$$\mathbf{E} \simeq -\left(\mathbf{v}_p - \frac{\mathbf{j}}{en}\right) \times \frac{\mathbf{B}}{c} - \frac{1}{en}\nabla P_e - \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \simeq -\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{c} + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{enc} - \frac{1}{en}\nabla P_e - \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \tag{9}$$

第 2 項は電荷を持った粒子がドリフトすることによって電荷に偏りが生じる効果で、これをホール項と呼ぶ。第 3 項は電子ガス圧勾配により生じる (そもそも電子の分布に偏りがあることに起因する) 電場でこれをバッテリー項と呼ぶ。
ホール項がどの程度の大きさかを見積もってみよう。

$$\frac{\text{右辺第 2 項}}{\text{右辺第 1 項}} = \left|\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}/(enc)}{\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c}\right| \underbrace{\simeq}_{\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}/c} \frac{cB^2}{4\pi Lenc}\frac{c}{vB} = \frac{cB}{4\pi Lenv} \simeq \underbrace{\frac{B^2}{4\pi\rho}}_{=v_A^2} \overbrace{\frac{cm_p}{eB}}^{=1/\Omega_{cp}} \frac{1}{Lv} = \left(\frac{v_A^2}{v^2}\right)\left(\frac{v}{L\Omega_{cp}}\right) \tag{10}$$

途中、微分などは典型的な空間スケール L などで置き換え、大雑把な見積もりを行った。Ω_{cp} は陽子のサイクロトロン振動数である。また $a_{Lp} = v/\Omega_{cp}$ はイオンのラーモア半径であり、多くの場合には $a_{Lp} \ll L$ である。よってこの項は十分無視できる大きさであることがわかる。同様にバッテリー項の大きさも見積もってみる。

$$\frac{\text{第 3 項}}{\text{第 1 項}} = \left|\frac{\nabla P_e/(en)}{\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c}\right| \simeq \frac{nk_BT_e}{Len}\frac{c}{vB} = \frac{k_BT_e}{m_pv^2} \underbrace{\frac{cm_p}{eB}}_{=1/\Omega_{cp}} \frac{v}{L} = \left(\frac{k_BT_e}{m_pv^2}\right)\left(\frac{v}{L\Omega_{cp}}\right) \tag{11}$$

電子温度と陽子温度が同程度であると考えれば、$k_BT_e \simeq m_ev_e^2 \simeq m_pv_p^2$ より、$O(k_BT_e/(m_pv^2)) \sim 1$ としてよいだろう。よってこの場合も $a_{Lp} \ll L$ ならば無視してよいことがわかる。
これら二つの項を無視した

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{c}\right) \tag{12}$$

がオームの法則としてよく知られている式である。