Induction equation

update:05/Jun/2011, presented by Sho Nakamura

Induction equation.

Faraday の法則

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \tag{1}$$

Ohm の法則 (電気伝導度 (electric conductivity) を σ とする)

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{c} \right) \tag{2}$$

Ampere の法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{3}$$

より

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{B}}{c} \right) = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \tag{4}$$

ここで $\eta \equiv c^2/4\pi\sigma$ とした。これを磁気拡散係数 (magnetic duffusivity) という。

$$\begin{aligned}
[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j[\nabla \times \mathbf{B}]_k = \epsilon_{ijk}\partial_j(\epsilon_{k\ell m}\partial_\ell B_m) = \epsilon_{kij}\epsilon_{k\ell m}\partial_j\partial_\ell B_m = (\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell})\partial_j\partial_\ell B_m \\
&= \partial_j\partial_i B_j - \partial_j\partial_j B_i = [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B}]_i
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで磁場の Gauss の法則

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{6}$$

より

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2\mathbf{B} \tag{7}$$

よって η を定数として扱うと

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta\nabla^2\mathbf{B} \tag{8}$$

を得る。これを誘導方程式 (Induction equation) という。η を定数としない場合には (1) 式の最右辺第 2 項より

$$
\begin{aligned}
[\nabla\times(\eta\nabla\times\mathbf{B})]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\eta\epsilon_{k\ell m}\partial_\ell B_m) = \epsilon_{kij}\epsilon_{k\ell m}[(\partial_j\eta)(\partial_\ell B_m)+\eta(\partial_j\partial_\ell B_m)] \\
&= (\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell})[(\partial_j\eta)(\partial_\ell B_m)+\eta(\partial_j\partial_\ell B_m)] \\
&= (\partial_j\eta)(\partial_i B_j)-(\partial_j\eta)(\partial_j B_i)+\eta(\partial_j\partial_i B_j-\partial_j\partial_j B_i) \\
&= (\partial_i B_j)(\nabla\eta)_j-[(\nabla\eta)\cdot\nabla]B_i+\eta\nabla^2 B_i \qquad (9)
\end{aligned}
$$

のように η の空間微分が残るため式が複雑になる。以下では η を定数とした (1) 式を使っていくことにする。
(1) 式において第 1 項と第 2 項のどちらが支配的であるかを大雑把に見積もるために

$$
\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\approx\frac{V_0B_0}{l_0},\ \ \eta\nabla^2B\approx\frac{\eta B_0}{{l_0}^2} \tag{10}
$$

として、第 1 項と第 2 項の比をとったもの

$$
R_m=\frac{l_0V_0}{\eta} \tag{11}
$$

を磁気レイノルズ数 (magnetic Reynolds number) と呼ぶ。天文現象では大体においては l_0 や V_0 が非常に大きく $R_m\gg 1$ であるが、磁気リコネクションが起きている領域は l_0 や V_0 が小さいと考えられている。以下では $R_m\ll 1$ の Diffusive limit の場合と、$R_m\gg 1$ の Perfectly conducting limit を考えることによって Induction equation の意味を考えていくことにする。

diffusive limit.

$R_m\ll 1$ より (1) 式の右辺において第 2 項が支配的として、第 1 項を無視すると

$$
\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\eta\nabla^2\mathbf{B} \tag{12}
$$

これは拡散方程式の形である。よって Induction equation でこの項が意味するのは磁場の拡散の効果である。η が 0 でないとき、すなわち σ が有限値のとき流体中は電流の抵抗となる中性粒子が存在し、それが原因となって磁場が拡散することをこの式は表している。
簡単な初期条件でこの方程式を具体的に解いてみる。磁場を $\mathbf{B}=B(x,t)\mathbf{e}_y$ として、初期条件を

$$
B(x,0)=\begin{cases} B_0 & (x>0) \\ -B_0 & (x<0) \end{cases} \tag{13}
$$

とする (B_0 は定数)。$t=0$ のとき $x=0$ を挟んで磁場の向きが変化しているので、$x=0$ には current sheet が存在するだろうことはただちに予想がつく。ここで current sheet は $t=0$ では $x=0$ 平面にのみ存在するものとする。

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \tag{14}$$

ここで $\xi = x/(4\eta t)^{1/2}$ と変数変換をすると

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{2\eta x}{(4\eta t)^{3/2}} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{(4\eta t)^{1/2}} \frac{d}{d\xi} \tag{15}$$

より

$$-\frac{2\eta x}{(4\eta t)^{3/2}} \frac{dB}{d\xi} = \frac{\eta}{4\eta t} \frac{d^2 B}{d\xi^2} \iff \frac{d^2 B}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dB}{d\xi} = 0 \tag{16}$$

$B' = dB/d\xi$ とおいて

$$\frac{dB'}{d\xi} + 2\xi B' = 0 \implies \int \frac{dB'}{B'} + \int 2\xi d\xi = \ln B' + \xi^2 = C_1 \implies B' = \frac{dB}{d\xi} = C_2 e^{-\xi^2} \implies B = C_2 \int_0^\xi e^{-u^2} du \tag{17}$$

ξ の定義より、$t \to 0$ で $\xi \to \infty$ である。初期条件より

$$B_0 = C_2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{C_2\sqrt{\pi}}{2} \iff C_2 = \frac{2B_0}{\sqrt{\pi}}(x > 0) \tag{18}$$

$$-B_0 = C_2 \int_0^{-\infty} e^{-u^2} du = -\frac{C_2\sqrt{\pi}}{2} \iff C_2 = \frac{2B_0}{\sqrt{\pi}}(x < 0) \tag{19}$$

よって

$$B = B_0 \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-u^2} du}_{\equiv \mathrm{erf}(\xi)} = B_0 \mathrm{erf}(\xi) \tag{20}$$

$\mathrm{erf}(\xi)$ は error function であり、$\xi \to \pm\infty$ で $\mathrm{erf}(\xi) \to \pm 1$ である。$|x| \ll (4\eta t)^{1/2}$ では $B \simeq B_0 x(\pi\eta t)^{-1/2}$、$|x| \gg (4\eta t)^{1/2}$ では $B \simeq B_0$ となっていることも式からわかる。
ここで拡散していく磁場によって電流密度はどのように変化していくかも計算してみる。Ampere の法則より

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \frac{dB}{dx} \mathbf{e}_z \tag{21}$$

$$\therefore\ \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dB}{d\xi} \mathbf{e}_z = \frac{2c}{4\pi(4\pi\eta t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\eta t}\right) \mathbf{e}_z \tag{22}$$

よって current sheet の典型的な厚さは $l \simeq 4\sqrt{\eta t}$ となり、時間とともに広がっていくことがわかる。以上から、$x = 0$ 付近の磁場のエネルギーが current sheet で起こる ohmic dissipation によって Jule 熱に変換されていくことがわかる。発生する電流の総量 J は時間に依存せず

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} j_z dx = \frac{c}{4\pi} B|_{-\infty}^{\infty} = \frac{c}{2\pi} B_0 \tag{23}$$

となって一定値である。

マスター方程式.

もう一度拡散方程式

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \tag{24}$$

を見返してみる。拡散という物理現象をミクロスコピックに見ると、それはランダムウォークからきている。それを実際に見てみる。簡単のため一次元で考える。ある時刻 t、ある位置 x における磁場を $B(x,t)$ とする。ランダムウォーク (酔歩、すなわち酔っぱらいの歩く様) より、時刻が $t+\Delta t$ になったとき時刻 t で位置 x にあった磁場の半分は $x+\Delta x$ に移動し、もう半分は $x-\Delta x$ に移動したと考える。すると $t+\Delta t$ で位置 x にくるのは、t で隣りの $x-\Delta x$ にいた B の半分と t で $x+\Delta x$ にいた B の半分である。したがって

$$\begin{aligned} B(x,t+\Delta t) &= B(x,t) - B(x,t) + \frac{1}{2}B(x+\Delta x,t) + \frac{1}{2}B(x-\Delta x,t) \\ &= B(x,t) + \frac{1}{2}\left[(B(x+\Delta x,t) - B(x,t)) - (B(x,t) - B(x-\Delta x,t))\right] \end{aligned} \tag{25}$$

と書ける。これをマスター方程式という。Δt、Δx が十分小さいとして Taylor 展開をするが、右辺は中心差分の形をしているので Δx の 2 次まで展開しなければならないことに注意すると

$$B(x+\Delta x,t) \simeq B(x,t) + \frac{\partial B}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\Delta x^2 \tag{26}$$

$$B(x-\Delta x,t) \simeq B(x,t) - \frac{\partial B}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\Delta x^2 \tag{27}$$

$$B(x,t+\Delta t) \simeq B(x,t) + \frac{\partial B}{\partial t}\Delta t \tag{28}$$

$$\therefore\ B(x,t) + \frac{\partial B}{\partial t}\Delta t \simeq B(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial^2 x}\Delta x^2 \tag{29}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} \simeq \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \tag{30}$$

となり、確かに拡散方程式の形が導ける。(24) 式と比較すると $\eta = \Delta x^2/2\Delta t$ である。すると

$$(4\eta t)^{1/2} = \Delta x\sqrt{2\frac{t}{\Delta t}} \simeq \Delta x\sqrt{N} \tag{31}$$

ここで $N = \Delta t/t$ であり、これはランダムウォークの step 数である。ランダムウォークによって粒子が運動する場合にその粒子の進む大体の距離が $\sqrt{N}$ に比例する。

以上よりランダムウォーク、すなわち秩序だった運動を無秩序にすることが拡散の本質ということがわかる (具体的に解いた先ほどの例で、拡散によって初期に $x=0$ を挟んで反対向きに整列していた磁場が無秩序となり、最終的に磁場が消えて

しまった)。具体的な計算をせずとも磁場の拡散の典型的な幅及び current sheet の幅が大体 $(\eta t)^{1/2}$ となることにも納得がいく。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \simeq \frac{B_0}{\tau_d} \tag{32}$$

と再び大雑把に近似すると、(24) 式より

$$\tau_d = \frac{{l_0}^2}{\eta} \tag{33}$$

となる。τ_d を diffusion time-scale と呼び、磁場が拡散される典型的な時間を表す。η は fully-ionized の場合に

$$\eta = \frac{m_e}{\mu n_e e^2 \tau_{ei}} = 5.2 \times 10^{11} T^{-3/2} \ln \Lambda \ \ (\mathrm{cm}^2 \ \ \mathrm{s}^{-1}) \tag{34}$$

と見積もられているので

$$\tau_d \simeq 1.9 \times 10^{-12} {l_0}^2 T^{3/2} \ln \Lambda \ \ (\mathrm{s}) \tag{35}$$

である。具体的には $l_0 \sim 10^9 cm, T \sim 10^6 K$ のときおよそ $\tau_d \sim 10^{14} s$ である。diffusion time-scale から現象の大きさ (length-scale) を見積もることも可能である。例えば、solar flare の場合には磁場のエネルギーの解放が $100 \sim 1000s$ で行われている。このことから、solar flare の length-scale は $T \sim 6000K$ として大体 $10^4 \sim 10^5 cm$ であると予想される。

perfectly conductiong limit.

$R_m \gg 1$ より Induction equation の第 1 項が支配的として、第 2 項を無視すると

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{36}$$

となる。Perfectly conducting limit とはすなわち拡散のない、”理想的な ”磁気流体といえる。電気伝導度 σ が無限大であると考えてもよい。突然ではあるがここで流体中のある面を貫く磁場の量、すなわち磁束 Φ について考えよう。定義より

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{37}$$

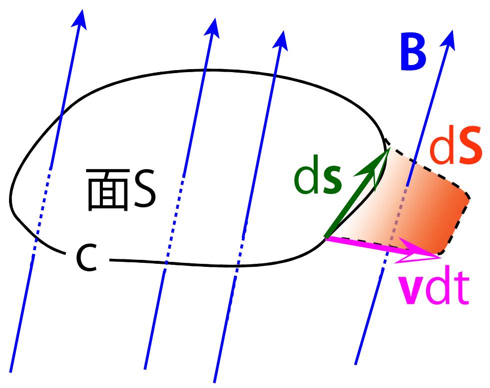

fig 1: 時間とともに変化する面 S、それを淵とする平曲路 c の変化。

である。これの Lagrange 微分を考えると、1. 磁場そのものが時間とともに変化することと 2. 流れによって面 S が変化することの 2 つの変化が効いてくるはずである。面 S を囲む閉曲線を C とし、その微小線素ベクトルを $d\mathbf{s}$ とする。流体の速度を $\mathbf{v}$ として、微小時間 dt で線素 $d\mathbf{s}$ が $\mathbf{v}dt$ だけ動いたとすれば、それによる面積の変化は $dS = \mathbf{v}dt \times d\mathbf{s}$ となる。面積 dS を貫く磁場の量が $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v}dt \times d\mathbf{s}) = -dt(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot ds$ となることと、ストークスの回転定理より

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} - \oint_C \mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot ds = \iint_S \underbrace{(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}))}_{(36)}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{38}$$

となり、磁束が流体の流れに沿って保存されることがわかる (この導出方法が数学的に物足りないという方は東北大学で開講されている李先生の天体物理学実習 2 の配布プリントを参照して頂きたい)。
磁束が流れに沿って保存されるとはどういう意味だろうか。もう少し詳しく見てみる。それにはまず B/ρ(単位質量あたりの B、specific mean magnetic field) の Lagrange 微分を計算する。途中、連続の式と Induction equation(1) 式を用いて

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}\mathbf{B} + \frac{1}{\rho}\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \frac{\mathbf{B}}{\rho}\nabla\cdot v + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}\right) = \frac{\mathbf{B}}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}(\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}) \tag{39}$$

である。

$$\begin{aligned}
[\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\epsilon_{k\ell m}v_\ell B_m) = \epsilon_{kij}\epsilon_{k\ell m}(B_m(\partial_j v_\ell) + v_\ell(\partial_j B_m)) = (\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell})(B_m(\partial_j v_\ell) + v_\ell(\partial_j B_m)) \\
&= B_j(\partial_j v_i) + v_i(\partial_j B_j) - B_i(\partial_j v_j) - v_j(\partial_j B_i) = [(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}(\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{B}}_{=0}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}]_i \\
&= [(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}]_i
\end{aligned} \tag{40}$$

となる。

$$(39),(40) \implies \frac{D}{Dt}\left(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\right) = \frac{\mathbf{B}}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}((\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{v})) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} \tag{41}$$

となる。
次に時刻 t で位置 $\mathbf{x}(t)$、$\mathbf{x}(t)+\delta\mathbf{x}(t)$ にあった流体要素が時刻 $t+\Delta t$ にそれぞれ $\mathbf{x}(t+\Delta t)$、$\mathbf{x}(t+\Delta t)+\delta\mathbf{x}(t+\Delta t)$ に移動したとする。流体の速度を $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ とすると

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) \simeq \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(x,t)\Delta t \tag{42}$$

$$\mathbf{x}(t+\Delta t)+\delta\mathbf{x}(t+\Delta t) \simeq \mathbf{x}(t)+\delta\mathbf{x}(t)+\mathbf{v}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x},t)\Delta t \simeq \mathbf{x}(t)+\delta\mathbf{x}(t)+[\mathbf{v}(\mathbf{x},t)+\delta\mathbf{x}\cdot\nabla)\mathbf{v}]\Delta t \tag{43}$$

よって

$$\delta\mathbf{x}(t+\Delta t) = \delta\mathbf{x}(t) + (\delta\mathbf{x}\cdot\nabla)\mathbf{v}\Delta t \implies \frac{D\delta\mathbf{x}}{Dt} = (\delta\mathbf{x}\cdot\nabla)\mathbf{v} \tag{44}$$

となる。これを測地線変差方程式と呼ぶ。
(41) 式と (44) 式を見比べてみるとその形は全く同じである。$\delta\mathbf{x}$ と $\mathbf{B}$ が最初に平行であったならば、その後も常に平行である。これは微小な距離だけ離れた 2 つの流体要素が同じ磁力線上にあったとすると、その 2 つの流体要素はその後もおなじ磁力線上に存在することになる。これは磁力線 (磁場) が流体要素とともに運動することを意味し、これを磁力線の凍結 (frozen-in) と呼ぶ。Induction equation(1) 式の $\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ のことを対流項とも呼ぶのはそのためである。
Induction equation の拡散項が無視できるような、例えば fully ionized gas においては磁場は流体とともに運動する。例としては、星形成などでは星間ガスが星間磁場とともに 1 カ所に集まろうとするため、そのままでは星形成中心部の磁場が強烈になってしまう。