Euler微分とLagrange微分の関係

update:29/Dec/2011, presented by Sho Nakamura

数学的導出

Euler 的記述法は場所 $\mathbf{x}$ と時刻 t とを独立変数として、物理量を $Q(\mathbf{x},t)$ や $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ のように表す。これに対して Lagrange 的記述法は、適当な時刻 $t=0$ においてある流体要素の位置を $\mathbf{X}$ と表すとき、任意の時刻 t における同じ流体要素の位置 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{X}$ が

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t),\ \ \mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t) \tag{1}$$

で関係づけられるとして、一つの流体要素の運動を時間とともに追いかける記述法である。この関係式は時刻 $t=0$ に $\mathbf{X}$ にいた流体要素は時刻 t には必ず $\mathbf{x}$ の位置にやってくる、ということを意味する式である。このとき

$$\mathbf{X}=\mathbf{x}(\mathbf{X},0) \tag{2}$$

である。
これらより、物理量 Q や $\mathbf{v}$ は

$$Q(\mathbf{x},t)=Q(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)=\tilde{Q}(\mathbf{X},t),\ \ \mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)=\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{X},t) \tag{3}$$

のように書くことができる。ここで˜をつけているのは $\mathbf{x}$ を変数としたときと $\mathbf{X}$ を変数としたときとでは関数の形が違うことを強調するためである。
では、Euler 的な時間微分 $\partial/\partial t$ と Lagrange 的な時間微分 D/Dt との違いについて考えていこう。Euler 的表記では $\mathbf{x}$ と t は独立変数なので

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}=\mathbf{0} \tag{4}$$

である。一方、この $\mathbf{x}$ の Lagrange 的な時間微分を考えると

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt}=\frac{D}{Dt}\mathbf{x}(\mathbf{X},t)=\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{X},t)=\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \tag{5}$$

となり、これは純粋に流体要素の位置の時間変化率、すなわち流体要素の速度を計算していることに一致する。一般的な物理量 $Q(\mathbf{x},t)$ を Lagrange 微分すると

$$\frac{D}{Dt}Q(\mathbf{x},t)=\frac{\partial}{\partial t}Q(\mathbf{x},t)+\frac{D\mathbf{x}}{Dt}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}Q(\mathbf{x},t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\right)Q(\mathbf{x},t)\ \Longrightarrow\ \therefore\ \frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla \tag{6}$$

となり、Euler 微分と Lagrange 微分の関係式を導くことができる。

直感的導出

あるマラソンランナーの集団が、冷涼な気候の都市から温暖な気候の都市までを走り抜くという過酷なマラソンに挑戦していたとしよう。スタート時刻は早朝で、昼頃にはゴールに到達するという、驚異的なスピード展開でマラソンが行われたとする。微小時間 δt 秒の間に、マラソンランナーが感じる気温の変化には二種類あり

$$\delta T_{\mathrm{runner}} = \delta T_{t \to t+\delta t} + \delta T_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}+\delta \mathbf{x}} \tag{7}$$

左辺の第一項は、早朝から走り出して、だんだんと時間が経つにつれて日が高くなり、気温が上昇してくることからランナーが感じる気温の変化である。第二項は、ランナー δt 秒間に $\delta \mathbf{x}$ だけ温暖な方向に走ることにより感じる気温の変化である。ランナーの速度を $\mathbf{v}$ とすると第二項は温度勾配を用いて

$$\delta T_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}+\delta \mathbf{x}} = \delta t \mathbf{v} \cdot \frac{\delta T}{\delta \mathbf{x}} \tag{8}$$

これより、(7) 式の両辺を δt で割ると

$$\frac{\delta T_{\mathrm{runner}}}{\delta t} = \frac{\delta T}{\delta t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\delta T}{\delta \mathbf{x}} \xrightarrow{\delta t \to 0} \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \tag{9}$$

左辺を Lagrange 微分としたのは マラソンランナー = 気温の測定者 としたからである。

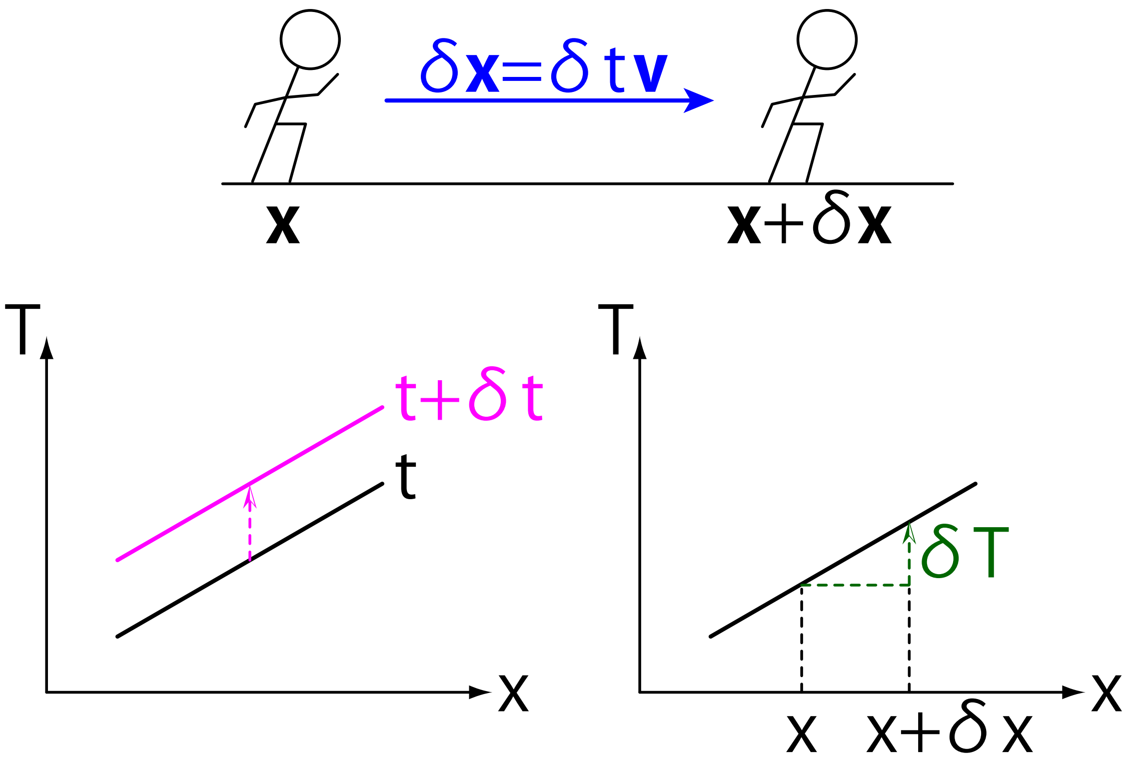

fig 1: 上図:ランナーが δt 秒間に $\delta \mathbf{x}$ 移動する図。左下図:δt 秒経過することによって勝手に気温が変動する。右下図:δt 秒間の間にランナーが移動することにより気温の変化を感じる。

Bibliography

[1] 東北大学理学部宇宙地球物理学科天文学コース, 天体物理学実習 II, 2008, 李准教授演習プリント