# MHDのエネルギー保存則

# (presented by Sho Nakamura)

update:24/May/2011

## 内部エネルギー

磁気流体のエネルギーを考えるには流体の運動エネルギー・内部エネルギー・電磁場のエネルギーを考えなければならない。まずは内部エネルギーから見ていくことにする。
$s$ を流体の単位質量あたりのエントロピーとすると $Tds = dQ$ より

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{DQ}{Dt} \equiv -\mathcal{L} \tag{1}$$

ここで $\mathcal{L}$ は energy loss function と呼ばれる量であり、ある流体要素の正味のエネルギーの吸い込みやわきだしの量を表す。断熱変化のときエントロピーは変化しないので $\mathcal{L} = 0$ となる。単位質量あたりの内部エネルギーを $e$ とすると、熱力学第一法則より

$$de = dQ - pdV = Tds - pdV \implies \rho \frac{De}{Dt} = \underbrace{\rho T \frac{Ds}{Dt}}_{(1)} - \rho p \frac{DV}{Dt} = -\mathcal{L} - \rho p \frac{DV}{Dt} \tag{2}$$

ここで $V$ は単位質量あたりの体積 $V = 1/\rho$ である。よって

$$(2) \implies \rho \left( \frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right) = -\mathcal{L} \tag{3}$$

連続の式

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{4}$$

と (3) 式より

$$\rho \frac{De}{Dt} = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - \mathcal{L} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} \tag{5}$$

を得る。単位体積あたりの内部エネルギーの時間変化が、体積変化 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ に伴って圧力がする仕事と熱のやり取り $\mathcal{L}$ によってもたらされるという式である。

---

ideal gas を仮定すると、内部エネルギーは体積 (密度) に依存しないから

$$de = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial e}{\partial V} \right)_T dV = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_V dT = dQ - pdV \implies \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = C_V \implies de = C_V dT \tag{6}$$

さらに $V = V(p,T)$ だと思うと

$$de = dQ - pdV = dQ - p\left(\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT\right) \underbrace{\Longrightarrow}_{(6)} dQ = p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(C_V + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right) dT \tag{7}$$

$$\therefore (7) \Longrightarrow \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p \equiv C_p = C_V + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (\text{for } dp = 0) \tag{8}$$

ideal gas の状態方程式より

$$p = nk_BT = \frac{\rho}{m}k_BT \Longleftrightarrow V = \frac{1}{\rho} = \frac{k_BT}{\mu p} \Longrightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{k_B}{\mu}\frac{1}{p} \tag{9}$$

である。ここで $\mu$ は平均粒子質量である。

$$\therefore (8),(9) \Longrightarrow C_p - C_V = \frac{k_B}{m} \tag{10}$$

より、比熱比 $\gamma = C_p/C_V$ を用いれば

$$C_V(\gamma - 1) = \frac{k_B}{m} \Longleftrightarrow C_V = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{k_B}{m} \tag{11}$$

$$C_p = \frac{k_B}{m}\left(1 + \frac{1}{\gamma - 1}\right) = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{k_B}{m} \tag{12}$$

と書ける。

$$(6),(11) \Longrightarrow e = C_VT = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{k_B}{m}T = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \tag{13}$$

とわかるので、これと (3) 式より

$$\begin{aligned}
\frac{\rho}{\gamma - 1}\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\rho}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}\right) - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{Dp}{Dt} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1}\left[\frac{1}{\rho^\gamma}\frac{Dp}{Dt} - \gamma\rho^{-\gamma-1}\frac{D\rho}{Dt}\right] \\
&= \frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1}\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = -\mathcal{L} \qquad (14)
\end{aligned}$$

この式から断熱変化 $\mathcal{L} = 0$ のときは $p/\rho^\gamma = \mathrm{const}$ となるという、よく目にする式を導出できた。

# 運動エネルギー + 内部エネルギー

ここまでで内部エネルギーの時間変化を表す式を導出した。さて、いよいよ磁気流体におけるエネルギー保存式を考えていこう。次は運動エネルギーの時間変化を表す式を考える。それは簡単で、磁気流体の運動方程式の両辺を $\mathbf{v}$ との内積をとることにより求まる。

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\mathbf{v}\cdot\nabla p + \mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{j}\times\frac{\mathbf{B}}{c}\right) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{F} \tag{15}$$

この式は圧力勾配、ローレンツ力、外力による仕事によって流体要素の運動エネルギーが変化することを表す式である。

$$(5)+(15) \implies \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + e\right) = -\mathbf{v}\cdot\nabla p + \mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{j}\times\frac{\mathbf{B}}{c}\right) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{F} - p\nabla\cdot\mathbf{v} - \mathcal{L} \tag{16}$$

ここで Ohm's law の式の両辺 $\mathbf{j}$ との内積を取ったものを考えると

$$j^2 = \sigma\left[\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{j}\cdot\left(\mathbf{v}\times\frac{\mathbf{B}}{c}\right)\right] = \sigma\left[\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{v}\cdot\left(\frac{\mathbf{B}}{c}\times\mathbf{j}\right)\right] \iff \mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{j}\times\frac{\mathbf{B}}{c}\right) = -\frac{j^2}{\sigma} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} \tag{17}$$

$$\therefore (16),(17) \implies \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + e\right) = -\nabla\cdot(p\mathbf{v}) + \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - \frac{j^2}{\sigma} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{F} - \mathcal{L} \tag{18}$$

となる。連続の式 (4) に $v^2/2+e$ をかけたものを計算してみると

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\rho(\nabla\cdot\mathbf{v}) = \frac{D}{Dt}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\right] - \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2+e\right) + \left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\rho(\nabla\cdot\mathbf{v}) = 0 \\
&\iff \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2+e\right) = \frac{D}{Dt}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\right] + \left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\rho(\nabla\cdot\mathbf{v}) \\
&\qquad = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\right] + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\right] + \left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\rho(\nabla\cdot\mathbf{v})
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\therefore (18),(19) \implies &\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\right] + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\right] + \left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\rho(\nabla\cdot\mathbf{v}) = -\nabla\cdot(p\mathbf{v}) + \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - \frac{j^2}{\sigma} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{F} - \mathcal{L} \\
\iff &\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\right] + \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}v^2+e\right)\rho\mathbf{v}\right] = -\left(\mathcal{L}+\frac{j^2}{\sigma}\right) + \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - \nabla\cdot(p\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{F}
\end{aligned} \tag{20}$$

## + 電磁場のエネルギー

エネルギー保存式の形が大分見えてきたが、電磁場に関する項がまだ整理されていない。電磁場のエネルギーの出入りを知りたいのだから、電磁場の energy flux である Poynting vector

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{21}$$

の divergence を計算するのが物理的に妥当だろう。

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \partial_i(\epsilon_{ijk}E_jB_k) = \epsilon_{ijk}(B_k(\partial_iE_j) + E_j(\partial_iB_k)) = B_k(\epsilon_{kij}\partial_iE_j) - E_j(\epsilon_{jik}\partial_iB_k) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) \tag{22}$$

Faraday の法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{23}$$

Ampere の法則 (Ampere-Maxwell 式の変位電流項無視、MHD 近似)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{24}$$

より

$$(21) \sim (24) \implies \nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{1}{c}\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\frac{1}{2c}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \iff \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{S} \tag{25}$$

$$\therefore (20), (25) \implies \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + e\right) + \frac{1}{8\pi}B^2\right] + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2}v^2 + e + \frac{p}{\rho}\right)\rho\mathbf{v} + \mathbf{S}\right] = -\left(\mathcal{L} + \frac{j^2}{\sigma}\right) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \tag{26}$$

と書くことができる。(26) 式の左辺に新たに流体のエネルギー密度として磁場のエネルギー、そして場のエネルギーフラックスとして Poynting vector が加わった。これがエネルギー保存式の保存形式である。ちなみに $h = e + p/\rho$ は単位質量あたりのエンタルピーである。
右辺第一項をより具体的に

$$-(\mathcal{L} + j^2/\sigma) = -\nabla \cdot q - L_r + H_v + H_w + \rho\epsilon \tag{27}$$

のように具体的に書いてもよい。これは energy loss function + Jule heating (Ohmic dissipation) を熱流束 $q$、輻射 $L_r$、粘性による散逸 $H_v$、波による加熱 $H_w$、核融合反応による生成エネルギー $\rho\epsilon$ と表現したものである。( $j^2/\sigma$ は Jule 熱の発生を意味するので熱流束の中にまとめてしまった)。