# 東北大天文学専攻H15年、物理問題[3]

update: 2017 July 12, author: Sho K. NAKAMURA

## [ 1 ] マクスウェル方程式、電荷保存則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \implies \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

また

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \implies \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2}$$

以上より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{3}$$

が成り立つ。これが微分形の電荷保存則を表す式である。

## [ 2 ] 完全導体の性質

完全導体は電気伝導度 $\sigma = \infty$ より、$\mathbf{E}$ が存在するとその $\mathbf{E}$ を打ち消すように電荷が動くため、常に $\mathbf{E} = 0$ が成立する。また $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$ だとファラデーの法則より $\mathbf{E}$ が値を持つことになる。よって $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ である。

## [ 3 ] 無限に長い円筒導体間を伝わる電磁波

(a) ファラデーの法則より

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_r}{\partial z}\mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \theta}\mathbf{e}_z = ikE_{r0}e^{-i\omega t + ikz}\mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial E_{r0}}{\partial \theta}e^{-i\omega t + ikz}\mathbf{e}_z \tag{4}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega B_{\theta 0}e^{-i\omega t + ikz}\mathbf{e}_\theta \tag{5}$$

よって

$$kE_{r0} = \omega B_{\theta 0} \tag{6}$$

$$\frac{\partial E_{r0}}{\partial \theta} = 0 \tag{7}$$

を得る。またガウスの法則より

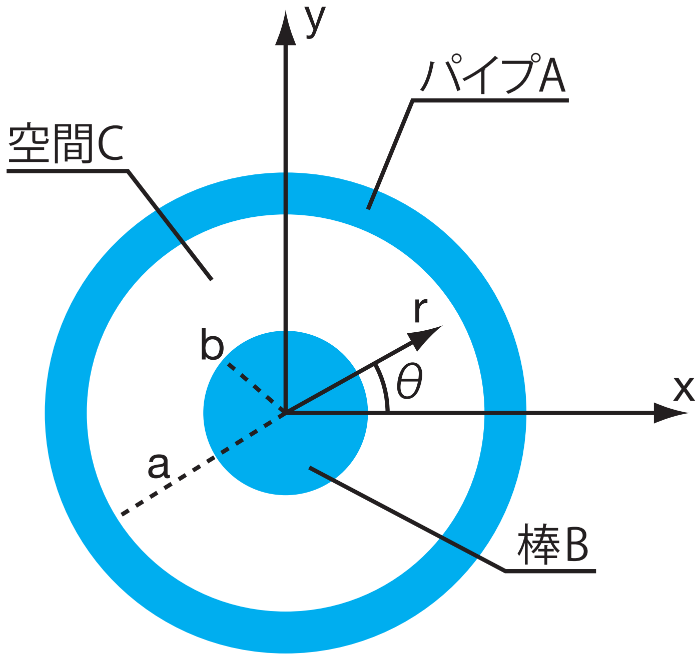


fig 1: 問題設定

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = \frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} = \left(\frac{E_{r0}}{r} + \frac{\partial E_{r0}}{\partial r}\right) e^{-i\omega t + ikz} = 0 \implies \frac{E_{r0}}{r} + \frac{\partial E_{r0}}{\partial r} = 0 \tag{8}$$

(7) 式より、$E_{r0}$ は $\theta$ には依存しないので、

$$(8) \implies \int \frac{dE_{r0}}{E_{r0}} = -\int \frac{dr}{r} \implies \ln|E_{r0}| = -\ln r + C_1 = \ln r^{-1} + C_1 \implies E_{r0} = C_2/r \tag{9}$$

アンペール・マクスウェルの法則より

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial z}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta)\mathbf{e}_z = \left\{-ikB_{\theta 0}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(B_{\theta 0} + r\frac{\partial B_{\theta 0}}{\partial r}\right)\right\} e^{-i\omega t + ikz} \tag{10}$$

$$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i\omega\mu_0\epsilon_0 E_{r0} e^{-i\omega t + ikz}\mathbf{e}_r \tag{11}$$

よって

$$kB_{\theta 0} = \omega\mu_0\epsilon_0 E_{r0} \tag{12}$$

$$B_{\theta 0} + r\frac{\partial B_{\theta 0}}{\partial r} = 0 \tag{13}$$

また磁場のガウスの法則より

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial B_{\theta 0}}{\partial \theta} e^{-i\omega t + ikz} = 0 \implies \frac{\partial B_{\theta 0}}{\partial \theta} = 0 \tag{14}$$

(13), (14) 式より、電場と同様に

$$B_{\theta 0} = C_3/r \tag{15}$$

を得る。一方、(6), (12) は同一条件で $E_{r0} = cB_{\theta 0}$ である。よって、定数を適当に $E_0$ とおけば、この円筒菅を伝わる電磁波は

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{r} e^{-i\omega t + ikz} \mathbf{e}_r \tag{16}$$

$$\mathbf{B} = \frac{E_0}{cr} e^{-i\omega t + ikz} \mathbf{e}_\theta \tag{17}$$

(b) 図のような、半径 $r$、高さ単位長さの同軸円筒でガウスの法則を体積積分することを考える。

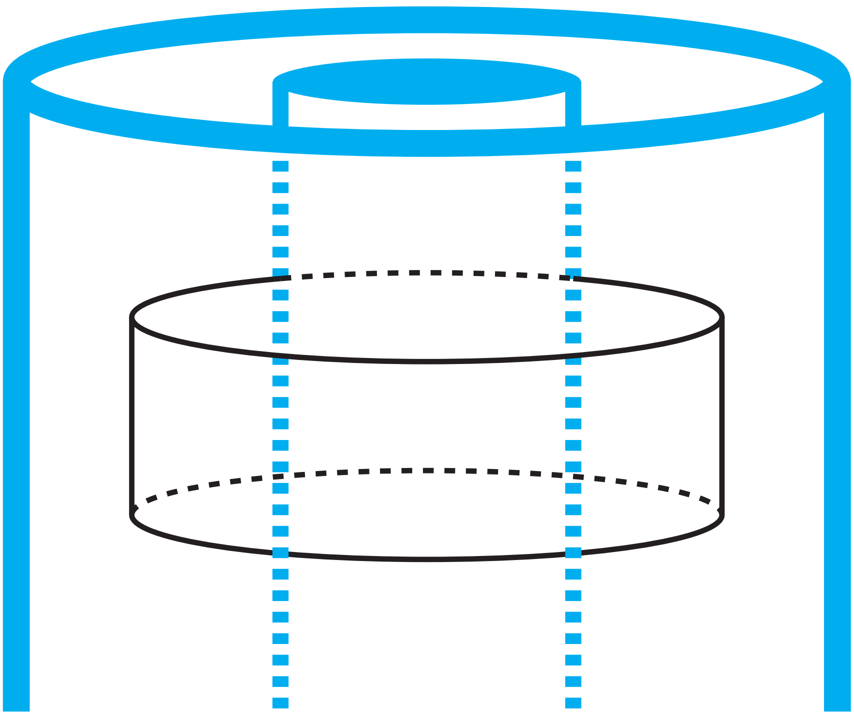

fig 2: 円筒での体積積分

$$\iiint_{\text{円筒}} \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \iiint_{\text{円筒}} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = 2\pi b \sigma_B(z)/\epsilon_0 \tag{18}$$

ここで $\sigma(z)$ は単位面積あたりの電荷分布である。左辺はガウスの定理より面積分となり、さらに電場は $r$ 成分しか持たないので、

$$\iiint_{\text{円筒}} \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \iint_{\text{円筒側面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\theta r \frac{E_0}{r} e^{-i\omega t + ikz} = 2\pi b \sigma_B(z)/\epsilon_0 \implies 2\pi b \sigma_B(z) = 2\pi \epsilon_0 E_0 e^{-i\omega t + ikz} \tag{19}$$

パイプ A 表面にも単位長さあたり同じ大きさ、反対符号の電荷が分布し、これを打ち消す。

$$2\pi b\sigma_B(z) = -2\pi a\sigma_A(z) = 2\pi\epsilon_0 E_0 e^{-i\omega t+ikz} \tag{20}$$

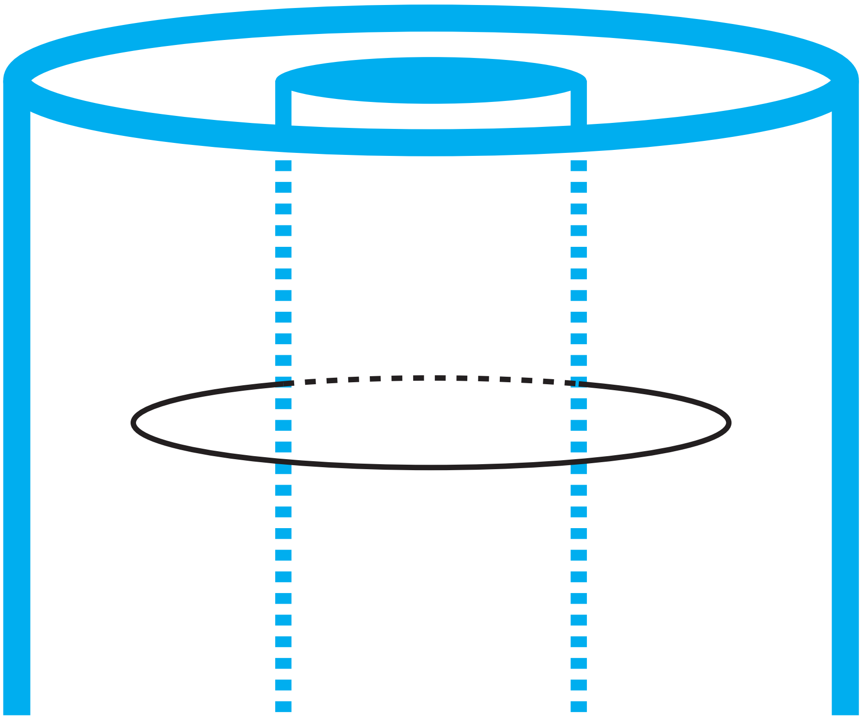

fig 3: 円盤での面積積分

電流密度に関しては半径 $r$、同軸の円盤上でアンペール・マクスウェルの法則を面積分をすることを考えると

$$\iint_{\text{円盤}} (\nabla\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_{\text{円盤}} \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} = 2\pi b\mu_0 j_B(z) \tag{21}$$

一方左辺はストークスの定理より

$$\iint_{\text{円盤}} (\nabla\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{S} = \oint_{\text{半径 } r \text{ 円}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} r\frac{E_0}{rc}e^{-i\omega t+ikz}d\theta = 2\pi\frac{E_0}{c}e^{-i\omega t+ikz} \implies 2\pi b j_B = \frac{2\pi E_0}{c\mu_0}e^{-i\omega t+ikz} \tag{22}$$

パイプ A 表面にも単位長さあたり同じ大きさ、反対符号の電流が分布し、これを打ち消す。

$$2\pi b j_B = -2\pi a j_A = \frac{2\pi E_0}{c\mu_0}e^{-i\omega t+ikz} \tag{23}$$

(c) ファラデーの法則を fig4 左図のように無限に小さい高さの四角で面積積分することを考える。磁場のこの面に垂直な成分は常に 0 であるから、左辺の電場の経路積分のみが残る。したがって電場については接線成分の連続が境界条件となる。

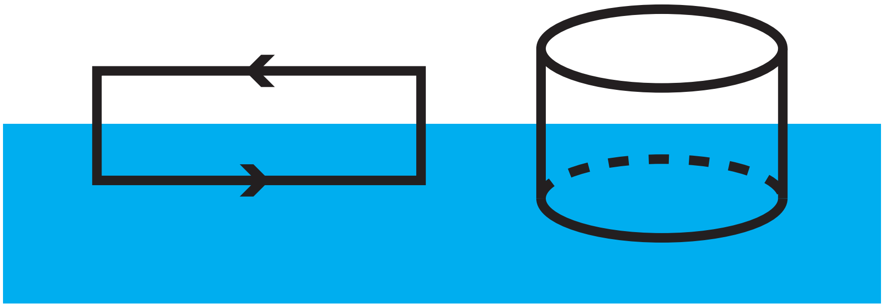

fig 4: ファラデーの法則の面積積分と磁場のガウスの法則の体積積分

次に磁場のガウスの法則を fig4 右図のように無限に小さい高さの円筒で体積積分することを考える。ガウスの定理より、この積分は面積積分になる。しかし、高さが無限に小さいので、円筒側面の面での積分は無視できる。残るのは円筒の上面と下面での面積積分となる。したがって磁場については法線成分の連続が境界条件となる。
よってここで求めた電場・磁場は境界条件を満たしている。