東北大天文学専攻H15年、物理問題[1]

update: 2017 July 04, author: Sho K. NAKAMURA

[1] ラグランジュ関数、共役運動量、運動方程式

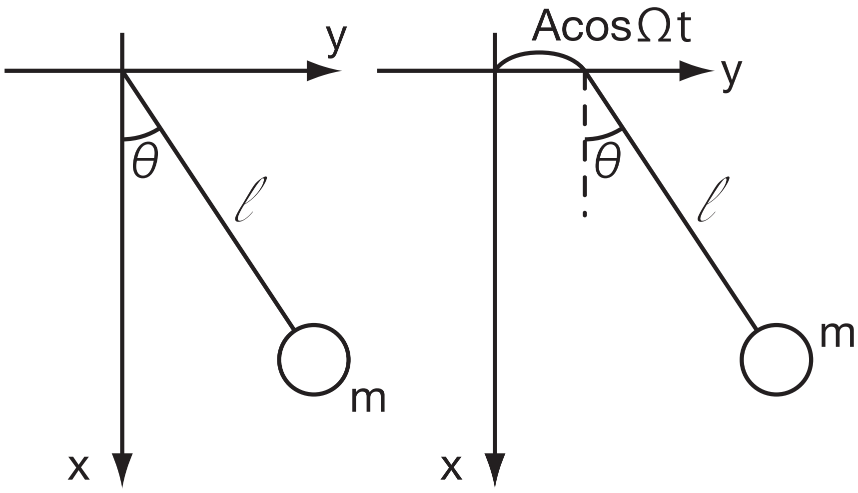

fig 1: 左図: 問題 1 と 2, 右図: 問題 3

運動エネルギーは、束縛条件 $r = \ell, \dot{r} = 0$ より

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

位置エネルギーは、原点の高さを 0 とすると

$$U = -mg\ell\cos\theta \tag{2}$$

よってこの系のラグランジアンは、抵抗力を考えない場合、

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta \tag{3}$$

のように表される。これより θ の共役運動量は

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} \tag{4}$$

抵抗力が存在しない場合の運動方程式は、ラグランジュ運動方程式より

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0 \implies \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \tag{5}$$

[2] 減衰振動

抵抗力の速度に対する比例係数を $2m\gamma$ とすると、抵抗力は $F_\theta = -2m\gamma v_\theta = -2m\gamma\ell\dot{\theta}$ である。よって

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = -2m\gamma\ell\dot{\theta} \implies \ddot{\theta} = -\frac{2\gamma}{\ell}\dot{\theta} - \frac{g}{\ell}\sin\theta \tag{6}$$

(a)$\theta \ll 1$ として、この運動方程式の一般解を求める。以下、$\gamma/\ell \equiv \alpha, g/\ell \equiv \beta$ と書く。$\sin\theta \simeq \theta$ と近似して

$$\ddot{\theta} = -2\alpha\dot{\theta} - \beta\theta \tag{7}$$

解の形として $\theta = e^{\lambda t}$ と仮定すると

$$(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \beta)e^{\lambda t} = 0 \tag{8}$$

これが恒等的に成り立つためには前の係数が 0 である必要がある。解の公式より

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \beta = 0 \implies \lambda = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\beta}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta} \tag{9}$$

今、γ の値が振り子の角振動数よりも小さいものとすると

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta} = i\omega \tag{10}$$

ここに $\omega = \sqrt{\beta - \alpha^2}$ である。よって一般解は

$$\theta(t) = e^{-\alpha t}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) \tag{11}$$

となる。ここで A, B は初期条件から求まる定数である。

(b)$t = 0$ で $\theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0$ のとき、これに対する解を求める。

$$\begin{cases} \theta_0 = A + B \\ 0 = i\omega(A - B) \end{cases} \implies A = B = \theta_0/2 \tag{12}$$

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\alpha t}\cos\omega t \tag{13}$$

となる。

[3] 強制振動と減衰振動

上記に加えて振り子の支点が $A\cos(\Omega t)$ で水平に動く場合、振り子の運動方程式はどうなるか、という計算が大変な問題である。これを大学院入試の制限時間内に解かせるというのは少しイジワルである。

(a) この系の運動方程式を求め、その一般解を導出する。

$$\begin{cases} x = \ell\cos\theta \\ y = A\cos\Omega t + \ell\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\ell\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = -A\Omega\sin\Omega t + \ell\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} \tag{14}$$

これより、運動エネルギーと位置エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 - 2A\ell\Omega\dot{\theta}\sin\Omega t\cos\theta + A^2\Omega^2\sin^2\Omega t) \tag{15}$$

$$U = -mg\ell\cos\theta \tag{16}$$

$$\therefore L = T - U = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 - 2A\ell\Omega\dot{\theta}\sin\Omega t\cos\theta + A^2\Omega^2\sin^2\Omega t) + mg\ell\cos\theta \tag{17}$$

ラグランジュ方程式より $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = -2m\gamma\ell\dot{\theta}$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} - mA\ell\Omega\sin\Omega t\cos\theta \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = m\ell^2\ddot{\theta} - mA\ell\Omega^2\cos\Omega t\cos\theta + mA\ell\dot{\theta}\Omega\sin\Omega t\sin\theta \tag{18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = mA\ell\Omega\dot{\theta}\sin\Omega t\sin\theta - mg\ell\sin\theta \tag{19}$$

$$\therefore m\ell^2\ddot{\theta} - mA\ell\Omega^2\cos\Omega t\cos\theta + mg\ell\sin\theta = -2m\gamma\ell\dot{\theta} \tag{20}$$

ここで微小振幅として $\sin\theta \simeq \theta, \cos\theta \simeq 1$ とすると

$$\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \beta\theta = \frac{A\Omega^2}{\ell}\cos\Omega t \tag{21}$$

(21) 式の一般解は、$\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \beta\theta = 0$ の一般解と (21) 式の特解を足し合わせたものと表現される。よって (21) 式の特解を $\theta = C_1\cos(\Omega t + C_2)$ として、これを代入すると

$$-C_1\Omega^2\cos\theta(\Omega t + C_2) - 2\alpha C_1\Omega\sin(\Omega t + C_2) + \beta C_1\cos(\Omega t + C_2) = \frac{A\Omega^2}{\ell}\cos\Omega t$$

$$\Longrightarrow (\beta - \Omega^2)C_1\cos(\Omega t + C_2) - 2\alpha C_1\Omega\sin(\Omega t + C_2) = \frac{A\Omega^2}{\ell}\cos\Omega t$$

$$\Longrightarrow C_1\sqrt{(\beta - \Omega^2)^2 + (2\alpha\Omega)^2}\cos(\Omega t_2 + C_2 + \phi) = \frac{A\Omega^2}{\ell}\cos\Omega t \tag{22}$$

ここで

$$C_1 = \frac{A\Omega^2}{\ell}\frac{1}{\sqrt{(\beta-\Omega^2)^2+(2\alpha\Omega)^2}} \tag{23}$$

$$C_2 = -\phi, \tan\phi = \frac{2\alpha}{\beta-\Omega^2} \tag{24}$$

などである。

$$\therefore \theta = e^{-\alpha t}(Ae^{i\omega t}+Be^{i\omega t}) + C_1\cos(\Omega t + C_2) \tag{25}$$

(b) 定常状態に落ち着いた時、すなわち前問の解で減衰項が 0 となったときの振幅は C_1 である。これが最大となるのは、C_1 の分母が最小になるときなので、$\Omega = \sqrt{\beta} = \sqrt{g/\ell}$ のときである。