円形加速器

update: 2017 June. 10, presented by Sho K. NAKAMURA

[?] シンクロトロン加速器

質量 m, 電荷 q の荷電粒子を fig1 で表されているような円形加速器で加速することを考える。荷電粒子の軌道を円形に保つために、この紙面に垂直な磁場 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ を加える。荷電粒子の運動はこの紙面内に限られていると仮定し $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta$ とする。また荷電粒子はすでに相対論的速度に達しているものとする。相対論的運動方程式より

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\times\frac{\mathbf{B}}{c} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(mc\gamma\beta_r) = q\beta_\theta B \\ \dfrac{d}{dt}(mc\gamma\beta_\theta) = -q\beta_r B \end{cases} \tag{1}$$

$Z \equiv \beta_r + i\beta_\theta$ と置くと、この連立方程式を簡単に解くことができる。

$$\frac{d}{dt}(m\gamma cZ) = iqBZ \tag{2}$$

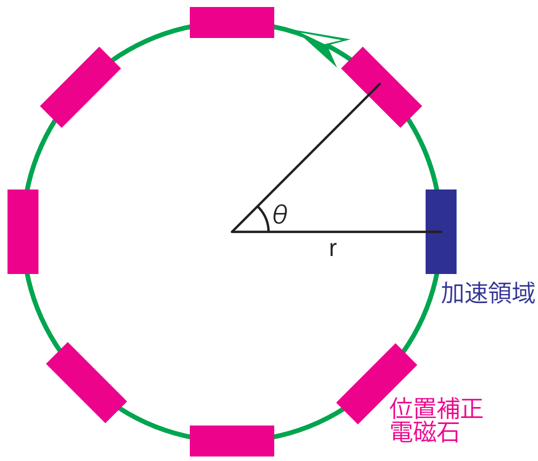

fig 1: シンクロトロン加速器の概要と座標設定。

ここで、粒子の速度はすでに超相対論的なものに達し、ほぼ定常状態に落ち着いているとする。すなわち $m\gamma \sim \mathrm{const}$ と仮定すると

$$\frac{dZ}{dt} = i\frac{qB}{m\gamma c}Z \Longrightarrow Z = Z_0 e^{iqB/(mc\gamma)t} = Z_0 e^{i\omega_{\mathrm{se}}t} \tag{3}$$

ここで $\omega_{\mathrm{se}} \equiv qB/mc\gamma$ はシンクロトロン振動数である。軌道半径 R は

$$R = \frac{v_\theta}{\omega_{\mathrm{se}}} = \frac{mc^2\gamma\beta_\theta}{qB} \Longrightarrow qB = \frac{mc^2\gamma\beta_\theta}{R} \tag{4}$$

$$\therefore\ mc\gamma\dot{\beta}_r = q\frac{mc^2\gamma\dot{\beta}_\theta}{R} \Longrightarrow \dot{\beta}_r = \frac{c^2\beta_\theta^2}{R} \tag{5}$$

点電荷が放出する輻射場のエネルギーを表した式、Lienard の公式より

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\{\gamma^6(\dot{v}^2 - |\dot{v}\times\boldsymbol{\beta}|^2)\} = \frac{2q^2}{3c^3}\{\gamma^6\dot{v}^2(1-\boldsymbol{\beta}^2)\} = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^4\frac{c^4\beta_\theta^4}{R^2} = \frac{2q^2}{3}\frac{\beta_\theta^4\gamma^4}{R^2} \propto E^4/R^2 \tag{6}$$

途中、磁場による軌道補正はでは常に $\mathbf{v}\perp\dot{\mathbf{v}}$ の性質を用いた。このことから、軌道半径 R が大きいほど輻射によるエネルギー損失は小さくなることがわかる。2012 年にヒッグス粒子を発見した CERN の円形加速器 LHC は周長 27km である。これは大体、日本の山手線の周長 34.5km より一回り小さいくらいのものと考えれば、その大きさが想像できるだろう。

参考文献

[1] 東北大学理学部物理学科 電気力学 (2008 年度開講, 担当教官: 中村哲) 授業ノート

[2] 東北大学理学部宇宙地球物理学科 天体物理学 II (2008 年度開講, 担当教官: 服部誠) 授業テキスト

[3] 東北大学理学部物理学科 素粒子物理学基礎 (2010 年度開講, 担当教官: 白井淳平) 授業スライド