ラゲール多項式

update: 2017 June 24, author: Sho K. NAKAMURA

母関数 (generating function) による関数定義

x, y の関数 $f(x,y)$ を y について展開すると、一般に

$$f(x,y) = \sum g_n(x) y^n \tag{1}$$

のように書くことができる。そして (1) 式のように、y^n の係数として $g_n(x)$ という関数が定義される。このようなとき、$f(x,y)$ を関数列 $\{g_n(x)\}$ の母関数という。

ラゲール多項式

母関数展開

$$\frac{1}{1-t} e^{-zt/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(z)}{n!} t^n \tag{2}$$

によって定義される $L_n(z)$ を Laguerre 多項式と呼ぶ。いくつか漸化式を証明しよう。

$$\begin{aligned}
(2) \underbrace{\Longrightarrow}_{z\text{ 微分}} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{dL_n}{dz} = \frac{1}{1-t}\left(-\frac{t}{1-t}\right) e^{-zt/(1-t)} = -\frac{t}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n \\
\Longrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{dL_n}{dz} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} \frac{dL_n}{dz} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} L_n \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{dL_n}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} \left(\frac{dL_{n-1}}{dz} - L_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dL_n}{dz} = n \frac{dL_{n-1}}{dz} - nL_{n-1} \ (n \geq 1) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
(2) \underbrace{\Longrightarrow}_{t\text{ 微分}} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{(n-1)!} t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2} e^{-zt/(1-t)} - \frac{x}{(1-t)^3} e^{-zt/(1-t)} = \frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n - \frac{z}{(1-t)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n \\
\Longrightarrow & (1-2t+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{(n-1)!} t^{n-1} = (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n - x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n \\
\Longrightarrow & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{(n-1)!} t^{n-1} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{(n-1)!} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{(n-1)!} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^{n+1} - z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n \\
\Longrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_{n+1}}{n!} t^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{(n-1)!} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{L_{n-1}}{(n-2)!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n-1}}{(n-1)!} t^n - z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n \\
\Longrightarrow & L_{n+1} - 2nL_n + n(n-1)L_{n-1} = L_n - nL_{n-1} - zL_n \Longrightarrow L_{n+1} - (2n+1-z)L_n + n^2 L_{n-1} = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore L_{n+1} - (2n+1-z)L_n + n^2 L_{n-1} = 0 \ (n \geq 2) \tag{4}$$

$$(4) \underbrace{\Longrightarrow}_{z\text{ 微分}} \frac{dL_{n+1}}{dz} - (2n+1-z)\frac{dL_n}{dz} + L_n + n^2 \frac{dL_{n-1}}{dz} = 0$$

$$(3) \underbrace{\Longrightarrow}_{\times n} n\frac{dL_n}{dz} = n^2\frac{dL_{n-1}}{dz} - n^2L_{n-1} \Longrightarrow n^2\frac{dL_{n-1}}{dz} = n\frac{dL_n}{dz} + n^2L_{n-1}$$

$$(3) \underbrace{\Longrightarrow}_{n\to n+1} \frac{dL_{n+1}}{dz} = (n+1)\frac{dL_n}{dz} - (n+1)L_n$$

$$\therefore (n+1)\frac{dL_n}{dz} - (n+1)L_n - (2n+1-z)\frac{dL_n}{dz} + L_n + n\frac{dL_n}{dz} + n^2L_{n-1} = z\frac{dL_n}{dz} - nL_n + n^2L_{n-1} = 0 \tag{5}$$

これらが Laguerre 多項式が満たす漸化式である。さらにこれら漸化式を用いて Laguerre 多項式 $L_n(z)$ が満たす微分方程式を導出しよう。

$$\begin{aligned}(5) \underbrace{\Longrightarrow}_{z\text{ 微分}} \quad & \frac{dL_n}{dz} + z\frac{d^2L_n}{dz^2} - n\frac{dL_n}{dz} + n\cdot\underbrace{n\frac{dL_{n-1}}{dz}}_{(3)} = \frac{dL_n}{dz} + z\frac{d^2L_n}{dz^2} - n\frac{dL_n}{dz} + n\frac{dL_n}{dz} + \underbrace{n^2L_{n-1}}_{(5)} \\ & = \frac{dL_n}{dz} + z\frac{d^2L_n}{dz^2} + nL_n - z\frac{dL_n}{dz} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore z\frac{d^2L_n}{dz^2} + (1-z)\frac{dL_n}{dz} + nL_n = 0 \tag{6}$$

これを Laguerre の微分方程式という。
Laguerre 多項式の具体的な形を導こう。

$$(2) \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n}{n!}t^n = \frac{1}{1-t}e^{-zt/(1-t)} = \frac{1}{1-t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{zt}{1-t}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}z^m\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}}$$

$$\frac{1}{(1-t)^m} = 1 + (m+1)t + \frac{1}{2!}(m+1)(m+2)t^2 + \cdots + \frac{1}{r!}(m+1)(m+2)\cdots(m+r)t^r + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(m+r)!}{r!m!}t^r$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n}{n!}t^n = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}z^mt^m\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(m+r)!}{r!m!}t^r = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(m+r)!}{r!(m!)^2}z^mt^{m+r} \underbrace{=}_{m+r=n} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^mn!}{(n-m)!(m!)^2}z^mt^n$$

$$\therefore L_n(z) = \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(n!)^2}{(n-m)!(m!)^2}z^m \tag{7}$$

Laguerre 多項式の表現方法はこれだけではない。微分系として

$$L_n(z) = e^z\frac{d^n}{dz^n}(z^ne^{-z}) \tag{8}$$

という形がある。これが (7) と一緒になることを示そう。

$$\begin{aligned}e^z\frac{d^n}{dz^n}(z^ne^{-z}) &= e^z\sum_{m=0}^{n}{}_nC_{n-m}n(n-1)\cdots(n-(n-m-1))z^{n-(n-m)}(-1)^me^{-z} = \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^mn!}{m!(n-m)!}n(n-1)\cdots(m+1)z^m \\ &= \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(n!)^2}{(m!)^2(n-m)!}z^m = (7)\end{aligned}$$

具体的な Laguerre 多項式の形は以下のよう。

$$L_0 = 1,\ L_1 = -z + 1,\ L_2 = z^2 - 4z + 2,\ L_3 = -z^3 + 9z^2 - 18z + 6,\ L_4 = z^4 - 16z^3 + 72z^2 - 96z + 24 \tag{9}$$

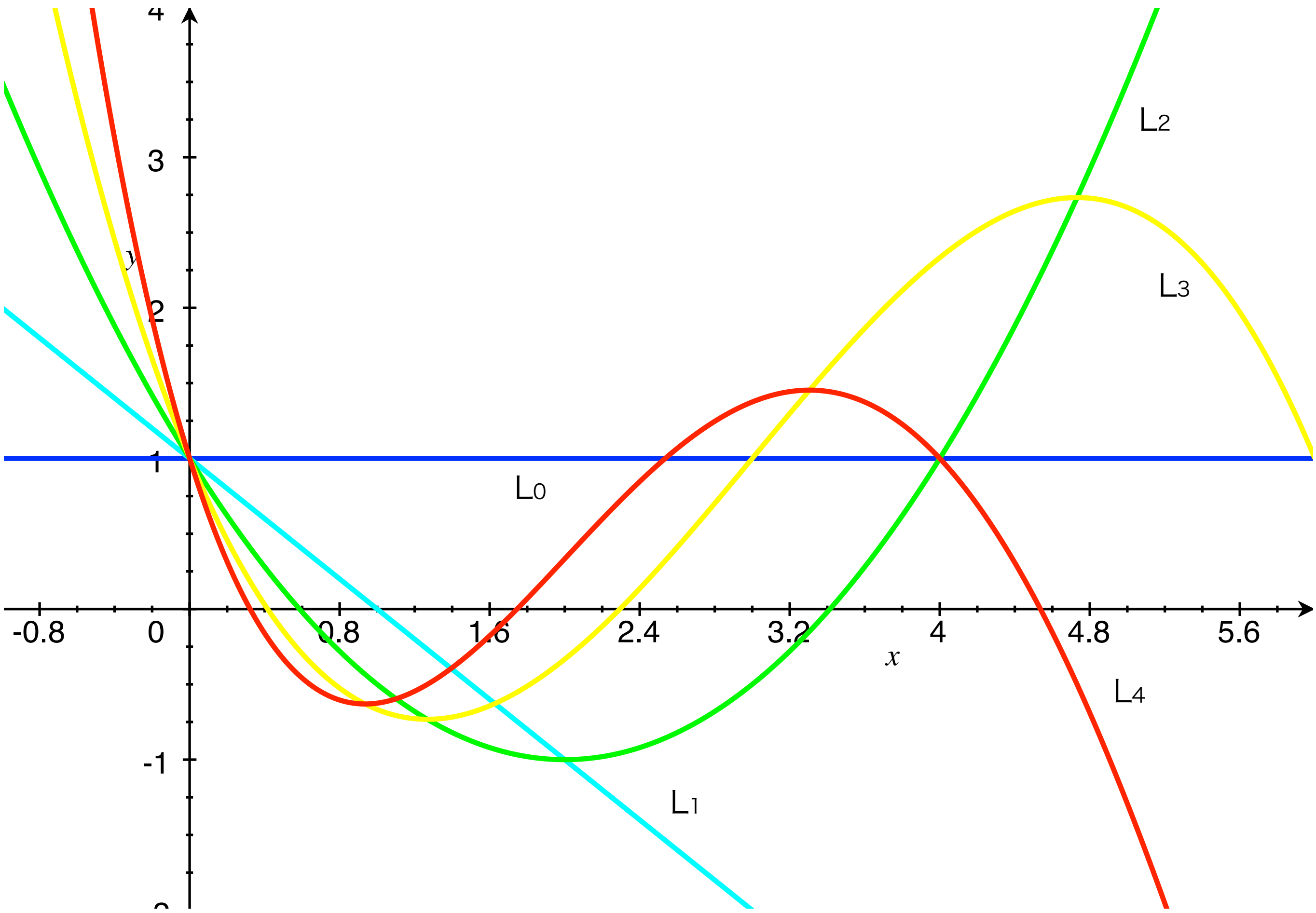

fig 1: 参考までに、Laguerre polynomial。ただし、見やすくするために $n!$ で割ったものを図示した。

Bibliography

[1] 田島 一郎, 近藤 次郎, "改訂演習工科の数学 4 複素関数", 培風館

[2] 中山 恒義, "裳華房フィジックスライブラリー 物理数学 II", 裳華房

[3] 福山 英敏, 小形 正男, "基礎物理学シリーズ 3 物理数学 I", 朝倉書店

[4] 東北大学理学部物理学科, 宇宙地球物理学科 波動論 (担当教官：柴田尚和) 授業プリント