Heaviside-Feynman's expression

update: 2016 Nov. 17, presented by Sho K. NAKAMURA

[?] 運動する点電荷が作る電場の別表現 (ヘヴィサイド・ファインマン表現)

運動する点電荷が作る電場は

$$\mathbf{E} = q\left[\frac{(1-\beta^2)(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})}{\kappa^3 R^2}\right] + \frac{q}{c}\left[\frac{\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{\kappa^3 R}\right] \tag{1}$$

と表現されるのであった。これをリエナー・ヴィーヒェルト表現 (Lienard-Wiechart's expresion) と呼ぶことにする。[ ] 括弧で囲まれた部分は遅延時間 (retarded time) での物理量である。これを求めるためには遅延ポテンシャルを求めたのち、それを微分したものを計算する必要があった。しかし、量子電磁気学で有名な Richard Fenman の講義ノート「ファインマン物理学」の電磁気学の章には、これを導出するための煩雑な数式は存在しない。Feynman の考え方は以下のようである。

> 運動していない時に点電荷が作る電場に
> 1. 点電荷と観測者の相対位置が変化することによる補正
> 2. 同様に点電荷が加速度運動することによる補正
>
> を加えてやればよい。

この言葉を数式として表現すると、次元合わせなどと合わせて

$$\mathbf{E} = q\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2}\right] + q\left[\frac{R}{c}\right]\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2}\right] + \frac{q}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\mathbf{n}] \tag{2}$$

と書ける。第 1 項はクーロン電場、第 2 項は点電荷が速度を持つことによる補正項、第 3 項は点電荷が加速度運動することによる補正項である。(2) 式をヘヴィサイド・ファインマン表現 (Heaviside-Feynman's expression) と呼ぶことにする。(2)=(1) となることを示そう。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2}\right] &= \frac{\partial t_{\mathrm{ret}}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_{\mathrm{ret}}}\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2}\right] = \left[\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right)\right] = \left[\frac{1}{\kappa}\left(-\frac{3}{R^4}\frac{\partial R}{\partial t}\mathbf{R} + \frac{1}{R^3}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}\right)\right] = \left[\frac{1}{\kappa}\left\{\frac{3c}{R^4}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{R} - \frac{c}{R^3}\boldsymbol{\beta}\right\}\right]\\ &= \left[\frac{c}{\kappa R^3}\{3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\}\right]\end{aligned} \tag{3}$$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\mathbf{n}]$ を求めるための準備として $[\dot{\mathbf{n}}], [\ddot{\mathbf{n}}], [\dot{\kappa}]$ を求めておく。

$$[\dot{\mathbf{n}}] = \left[\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{R}}{R}\right] = \left[-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial t}\mathbf{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}\right] = \left[\frac{c\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}{R^2}\mathbf{R} - \frac{c}{R}\boldsymbol{\beta}\right] = \left[\frac{c}{R}\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\}\right] \tag{4}$$

$$\begin{aligned}[\ddot{\mathbf{n}}] &= \left[-\frac{c}{R^2}\frac{\partial R}{\partial t}\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\} + \frac{c}{R}\left\{(\dot{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} + (\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n} + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\mathbf{n}} - \dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}\right]\\ &\underbrace{=}_{(4)} \left[\frac{c^2}{R^2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\} + \frac{c^2}{R^2}\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2-\beta^2\}\mathbf{n} + \frac{c^2}{R^2}\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}\} + \frac{c}{R}\left\{(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n}-\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}\right]\\ &= \left[\frac{3c^2}{R^2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n} - \frac{2c^2}{R^2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \frac{c^2}{R^2}\beta^2\mathbf{n} + \frac{c}{R}\left\{(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n}-\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}\right]\end{aligned} \tag{5}$$

$$[\dot{\kappa}] = \left[\frac{\partial \kappa}{\partial t}\right] = \left[-\dot{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right] \underbrace{=}_{(4)} \left[-\frac{c}{R}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2 + \frac{c}{R}\beta^2 - \mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right] \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\mathbf{n}] &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial t_{\mathrm{ret}}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_{\mathrm{ret}}}[\mathbf{n}]\right) = \frac{\partial t_{\mathrm{ret}}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_{\mathrm{ret}}}\left[\frac{\dot{\mathbf{n}}}{\kappa}\right] = \left[\frac{1}{\kappa}\left(-\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}\dot{\mathbf{n}} + \frac{\ddot{\mathbf{n}}}{\kappa}\right)\right] \\
&= \left[-\frac{c}{\kappa^3 R}\left\{-\frac{c}{R}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2 + \frac{c}{R}\beta^2 - \mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}\}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{3c^2}{R^2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n} - \frac{2c^2}{R^2}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \frac{c^2}{R^2}\beta^2\mathbf{n} + \frac{c}{R}\left\{(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}\right)\right] \qquad (7)
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
(2) \implies \mathbf{E} = q\Bigg[&\frac{\kappa^3}{\kappa^3 R^2}\mathbf{n} + \frac{\kappa^2}{\kappa^3 R^2}\{3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}\} - \frac{1}{\kappa^3 R^2}\left\{\beta^2 - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\right\}\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}\} + \frac{1}{c\kappa^3 R}(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}\} \\
&+ \frac{\kappa}{\kappa^3 R^2}\left\{3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n} - 2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \beta^2\mathbf{n}\right\} + \frac{\kappa}{c\kappa^3 R}\left\{(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}\Bigg]
\end{aligned}
$$

(1) 式の第 1 項と第 2 項に分けて考えよう。

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\kappa^3 R^2}\text{の項}\right) &= \kappa^3\mathbf{n} + \kappa^2\{3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}\} - \left\{\beta^2 - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\right\}\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}\} + \kappa\left\{3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n} - 2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \beta^2\mathbf{n}\right\} \\
&= \mathbf{n} - 3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} + 3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3\mathbf{n} \\
&\quad + 3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - 6(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n} + 3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} + 2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\boldsymbol{\beta} \\
&\quad - \beta^2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} + \beta^2\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3\mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\boldsymbol{\beta} \\
&\quad + 3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\mathbf{n} - 2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \beta^2\mathbf{n} - 3(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3\mathbf{n} + 2(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\beta^2\mathbf{n} \\
&= \mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} - \beta^2\mathbf{n} + \beta^2\boldsymbol{\beta} = (1-\beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

となり、確かに (1) 式の第 1 項に一致する。

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{c\kappa^3 R}\text{の項}\right) &= (\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\{(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}\} + \kappa\left\{(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}\right\} \\
&= (\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{n} - (\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} \\
&= (\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - \dot{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{n}\times\left\{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

となり、こちらも (1) 式の第 2 項に一致する。ファインマン先生の物理的直感おそるべし。

参考文献

[1] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, "The Feynman Lectures on Physics, Vol. II: Mainly Electromagnetism and Matter", Basic Books

[2] 東北大学理学部物理学科 電気力学 (2008 年度開講, 担当教官: 中村哲) 授業ノート

[3] 東北大学理学部宇宙地球物理学科 天体物理学 II (2008 年度開講, 担当教官: 服部誠) 授業テキスト