半整数次のベッセル関数

2017 June 28, author: Sho K. NAKAMURA

半整数次のベッセル関数

ベッセル関数のポアソン積分表示より

$$J_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{\nu-1/2}e^{iz\xi}d\xi \tag{1}$$

これは階乗を一般化したガンマ関数を使って書かれているので、半整数次の場合にも適用できる。そしてこれは当然、ベッセル関数の漸化式を満たす。

$$\begin{cases} J_{\nu-1} - J_{\nu+1} = 2J'_\nu \\ \\ J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = 2\nu J_\nu/z \end{cases} \Longrightarrow J_{\nu+1} = -J'_\nu + \frac{\nu}{z}J_n \Longrightarrow z^{-(\nu+1)}J_{\nu+1} = -z^{-(\nu+1)}J'_\nu + \nu z^{-(\nu+2)}J_\nu = -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z^{-\nu}J_\nu\right) \tag{2}$$

上式で $\nu \to \nu+1$ とすると

$$z^{-(\nu+2)}J_{\nu+2} = -z^{-(\nu+2)}J'_{\nu+1} + (\nu+1)z^{-(\nu+3)}J_{\nu+1} = -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}(z^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}) \underbrace{=}_{(2)} (-1)^2\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^2(z^{-\nu}J_\nu) \tag{3}$$

よって、この操作を $\xi-1$ 回繰り返すと

$$z^{-(\nu+\xi)}J_{\nu+\xi} = (-1)^\xi\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^\xi(z^{-\nu}J_\nu) \tag{4}$$

$\xi = n, \nu = 1/2$ を代入すれば、半整数次に対するベッセル関数式

$$z^{-(n+1/2)}J_{n+1/2} = (-1)^n\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n(z^{-1/2}J_{1/2}) \tag{5}$$

をまず得る。(1) 式より

$$J_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(1)}\sqrt{\frac{z}{2}}\int_{-1}^{1}e^{iz\xi}d\xi = \sqrt{\frac{z}{2\pi}}\frac{1}{iz}\left[e^{iz\xi}\right]_{-1}^{1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \tag{6}$$

$$\therefore J_{n+1/2} = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+1/2}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\frac{\sin z}{z} \tag{7}$$

と表現されることがわかる。次に $-n-1/2$ 次のベッセル関数を表現しよう。

$$\begin{cases} J_{-\nu-1} - J_{-\nu+1} = 2J'_{-\nu} \\ \\ J_{-\nu-1} + J_{-\nu+1} = 2(-\nu)J_{-\nu}/z \end{cases} \Longrightarrow J_{-\nu-1} = J'_{-\nu} - \frac{\nu}{z}J_{-\nu}$$

$$\Longrightarrow z^{-\nu-1}J_{-\nu-1} = z^{-\nu-1}J'_{-\nu} - \nu z^{-\nu-2}J_{-\nu} = \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z^{-\nu}J_{-\nu}\right) \tag{8}$$

上式で $\nu \to \nu + 1$ とすると

$$z^{-\nu-1-1} J_{-\nu-1-1} = \frac{1}{z}\frac{d}{dz}(z^{-\nu-1} J_{-\nu-1}) \underbrace{=}_{(8)} \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^2 (z^{-\nu} J_{-\nu}) \tag{9}$$

よってこの操作を $\xi - 1$ 回繰り返すと

$$z^{-\nu-(\xi-1)-1} J_{-\nu-(\xi-1)-1} = z^{-\nu-\xi} J_{-\nu-\xi} = \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^\xi (z^{-\nu} J_{-\nu}) \tag{10}$$

$\nu = 1/2, \xi = n$ を代入すると

$$z^{-n-1/2} J_{-n-1/2} = \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n (z^{-1/2} J_{-1/2}) \tag{11}$$

漸化式 (8) の途中式より

$$J_{-1/2} = J'_{1/2} + \frac{1/2}{z} J_{1/2} \underbrace{=}_{(6)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ -\frac{z^{-3/2}}{2} \sin z + z^{-1/2} \cos z \right\} + \sqrt{\frac{1}{2\pi z^3}} \sin z = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z \tag{12}$$

$$\therefore J_{-n-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{n+1/2} \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \frac{\cos z}{z} \tag{13}$$

Bibliography

[1] 東北大学大学院理学研究科, 服部誠准教授 特殊関数問題プリント