ガンマ・ベータ・ゼータ関数

update: 2017 June 15, presented by Sho K. NAKAMURA

Gamma function

Gamma function の定義

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \tag{1}$$

から諸公式を導こう。

$$\Gamma(x) = \left[-e^{-t} t^{x-1}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-1) e^{-t} (x-1) t^{x-2}\, dt = (x-1)\Gamma(x-1) \tag{2}$$

特に $x = n$(正の整数) のとき、

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)\cdots 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)! \int_0^\infty e^{-t} dt = (n-1)! \tag{3}$$

次に $x \to 1-x$ と置き換えると

$$\Gamma(1-x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1-x-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{-x} dt = \left[-e^{-t} t^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-1) e^{-t} (-x) t^{-x-1} dt = -x \int_0^\infty e^{-t} t^{-x-1} = -x\Gamma(-x) \tag{4}$$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt \underbrace{=}_{t=s^2} \int_0^\infty e^{-s^2} s^{-1} 2s ds = 2\int_0^\infty e^{-s^2} ds$$

これはガウス積分 (Appendix 参照) より

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \tag{5}$$

という重要な値が導ける。(2), (5) 式より

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1/2) &= \int_0^\infty t^{n+1/2-1} e^{-t} dt = \left[-t^{n-1/2} e^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (n-1/2) t^{n-3/2} (-e^{-t}) dt = (n-1/2) \int_0^\infty t^{n-1/2-1} e^{-t} dt \\
&= (n-1/2)\Gamma(n-1/2) = (n-1/2)(n-3/2)\Gamma(n-3/2) = \cdots = (n-1/2)(n-3/2)\cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(1/2) \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^n 2^n n!}\sqrt{\pi} \implies \therefore \Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}
\end{aligned} \tag{6}$$

(5) 式を用いて

$$\Gamma(-1/2)=\int_0^\infty t^{-3/2}e^{-t}dt=\left[-2t^{-1/2}e^{-t}\right]_0^\infty-\int_0^\infty(-2)t^{-1/2}(-e^{-t})dt=-2\underbrace{\int_0^\infty t^{1/2-1}e^{-t}dt}_{=\Gamma(1/2)}=-2\sqrt{\pi} \tag{7}$$

と導出できる。(4), (7) 式より

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2-n) &= \Gamma(-(n-1/2))\underbrace{=}_{(4)}\frac{-1}{n-1/2}\Gamma(1-(n-1/2))=\frac{-2}{2n-1}\Gamma(3/2-n)=\frac{-2}{2n-1}\frac{-2}{2n-3}\Gamma(5/2-n)\\ &= \cdots=\frac{(-1)^n2^n}{(2n-1)(2n-3)\cdot3\cdot1}\Gamma(1/2)=\frac{(-1)^n2^{2n}n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}\end{aligned} \tag{8}$$

も計算できる。

Beta function と Gamma function の関係式と公式

Beta function の定義

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{9}$$

(9) 式において $t=\sin^2\theta$ と置換すると、$dt=2\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ より

$$B(x,y)=\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-2}\theta(1-\sin^2\theta)^{y-1}2\sin\theta\cos\theta\ d\theta=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\ d\theta \tag{10}$$

とも書ける。これを用いて gamma, beta function を結びつける公式を証明しよう。

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\int_0^\infty e^{-s}s^{x-1}ds$$

$t=T^2, s=S^2$ と置換すると

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-T^2}t^{2x-2}2T\ dT\int_0^\infty e^{-S^2}s^{2y-2}2S\ dS=4\int_0^\infty e^{-T^2}T^{2x-1}dT\int_0^\infty e^{-S^2}S^{2y-1}dS$$

これを 2 次元 TS 平面上の積分と考え、積分を極座標に直してやればよい。すなわち $T=r\cos\theta, S=r\sin\theta$ のようにして、積分範囲を $r:0\to\infty, \theta:0\to\pi/2$ とする。このとき $dTdS=rdrd\theta$ となることに注意しよう。すると

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\overbrace{2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2x+2y-1}dr}^{R=r^2\text{と置換}}\underbrace{2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\ d\theta}_{(10)}=\underbrace{\int_0^\infty e^{-R}R^{(x+y)-1}dR}_{(1)}\ B(x,y)=\Gamma(x+y)B(x,y)$$

$$\therefore\ B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=B(y,x) \tag{11}$$

という公式が導けた。(11) 式に $x=z, y=1-z$ を代入すると

$$\underbrace{\frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(z+1-z)}}_{=1} = B(z,1-z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}dt \tag{12}$$

$u=t(1-t)^{-1}$ と置くと $dt = du/(1+u)^2$ より

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{1+u}{u}u^{-z}\frac{du}{(1+u)^2} = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u}du \tag{13}$$

これを求めるために、$f(v) = \dfrac{v^{z-1}}{1-v}$ を複素数平面上の fig1 のような経路で積分する。$0<z<1$ のとき $v=0$ が特異点であり、この点における留数は $\mathrm{Res}(v^{z-1}/(1-v)) = 1$ である。留数定理より

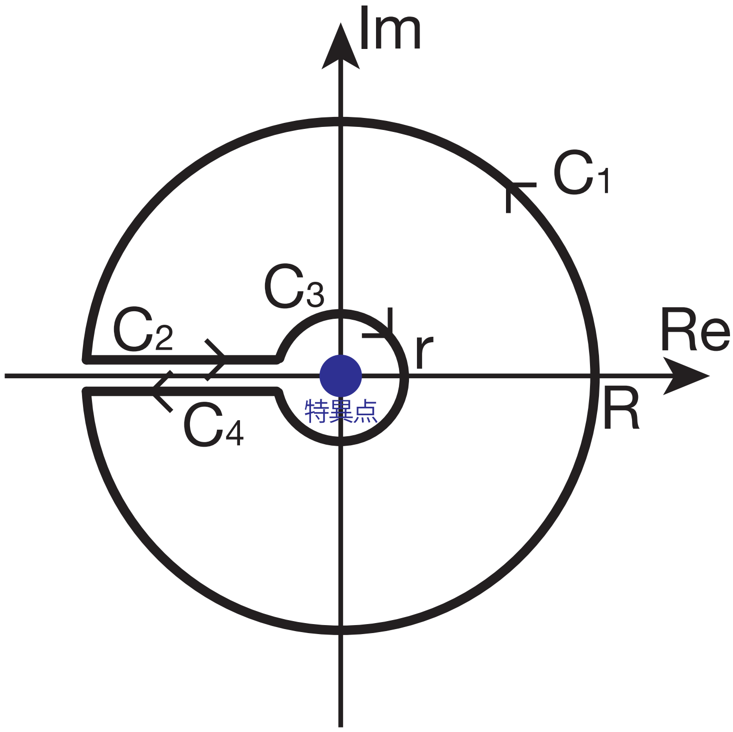

fig 1: 複素平面上での積分経路。

$$\oint_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(v)dv \underbrace{=}_{\text{時計回りなのでマイナス}} -2\pi i \tag{14}$$

$$\int_{C_1}\frac{v^{z-1}}{1-v}dv \underbrace{=}_{v\to Re^{i\theta}} \int_{-\pi}^{pi}\frac{(Re^{i\theta})^{z-1}}{1-Re^{i\theta}}Re^{i\theta}d\theta \overset{R\to\infty}{\Longrightarrow} 0 \tag{15}$$

$$\int_{C_2}\frac{v^{z-1}}{1-v}dv = \int_{-R}^{-r}\frac{v^{z-1}}{1-v}dv \underbrace{=}_{v=-u=ue^{i\pi}} \int_r^R \frac{u^{z-1}}{1+u}e^{i(z-1)\pi}du \tag{16}$$

$$\int_{C_3}\frac{v^{z-1}}{1-v}dv \underbrace{=}_{v\to re^{i\theta}} \int_{-\pi}^{pi}\frac{(re^{i\theta})^{z-1}}{1-re^{i\theta}}re^{i\theta}d\theta \overset{r\to 0}{\Longrightarrow} 0 \tag{17}$$

$$\int_{C_4} \frac{v^{z-1}}{1-v} dv = \int_{-r}^{-R} \frac{v^{z-1}}{1-v} dv \underbrace{=}_{v=-u=ue^{-i\pi}} \int_r^R \frac{u^{z-1}}{1+u} e^{-iz\pi} du \tag{18}$$

$$\begin{aligned} -2\pi i &= \oint_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(v)dv \overset{r\to 0, R\to\infty}{\overbrace{=}} \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u} du (e^{i(z-1)\pi} + e^{-iz\pi}) = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u} du(-e^{iz\pi} + e^{-iz\pi}) \\ &= -2i\sin(z\pi) \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u} du \end{aligned} \tag{19}$$

$$(13), (19) \implies -2i\sin(\pi z)\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -2\pi i \implies \therefore \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{20}$$

$\sin^n$ の定積分の公式

さらに有用な積分公式を導出しよう。(10), (11) 式より

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta \; d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{21}$$

これに $x = (n+1)/2, y = 1/2$ を代入すればよい。

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \; d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n/2+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)} \tag{22}$$

さらに

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^n\theta \; d\theta &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)} + \underbrace{\int_{\pi/2}^\pi \sin^n\theta \; d\theta}_{\Theta=\theta-\pi/2 \text{ と置換}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)} + \int_0^{\pi/2} \sin^n(\Theta + \pi/2) \; d\Theta \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)} + \int_0^{\pi/2} \cos^n\Theta \; d\Theta \end{aligned}$$

(21) 式に今度は $x = 1/2, y = (n+1)/2$ を代入すれば $\cos^n\Theta$ の積分結果が求まる。結果は (22) と同じとなることがわかるだろう。

$$\therefore \int_0^\pi \sin^n\theta \; d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)} \tag{23}$$

と求まる。実はこの式は、シンクロトロン放射強度を求めるときに使用する公式でもある。導出方法はともかくとして、電波天文学や磁場に関わる天体物理現象を扱う方々にはぜひとも覚えておいていただきたい。

Zeta function

ゼータ関数を

$$\zeta(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du \tag{24}$$

と定義する。

$$
\begin{aligned}
\zeta(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{z-1}}{1-e^{-u}}du \underbrace{=}_{\text{無限等比級数}} \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}\sum_{k=0}^\infty e^{-ku}du = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty u^{z-1}\sum_{k=1}^\infty e^{-ku}du \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)}\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty u^{z-1}e^{-ku}du \qquad (25)
\end{aligned}
$$

$v = ku$ とおくと

$$
\zeta)(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty (v/k)^{z-1}e^v\frac{dv}{k} = \frac{1}{\Gamma(z)}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^z}\underbrace{\int_0^\infty v^{z-1}e^v dv}_{\Gamma)(z)} = \sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^z} \qquad (26)
$$

となり、ガンマ関数で表現されていたゼータ関数が整数の逆数の無限和で表現されることが分かった。では実際のガンマ関数の値はどのようなものになるだろうか。$\zeta(1),\zeta(2),\zeta(4)$ を求めてみよう。
関数 $f(x) = 1/x\ (x > 0)$ を考えると、ある正の整数 k に対して

$$
\int_k^{k+1} 1/xdx < \int_k^{k+1} 1/kdx = \frac{1}{k}\left[x\right]_k^{k+1} = \frac{1}{k} \qquad (27)
$$

$\sum_{k=1}^n$ で和を取ると、最左辺は

$$
\int_1^{n+1} 1/xdx = \left[\ln x\right]_1^{n+1} = \ln(n+1) \qquad (28)
$$

$$
\therefore\ \ln(n+1) < \sum_{k=1}^n\frac{1}{k} \qquad (29)
$$

両辺の $\lim_{n\to\infty}$ とすると $\zeta(1) = \infty$ であることがわかる。有限の値ではなく無限大に発散することがわかる。
次に唐突であるが、$y = x^2\ (-\pi \leq x \leq \pi)$ が繰り返されている周期関数をフーリエ級数で表現することを考える。

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx = \frac{1}{3\pi}[x^3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \qquad (30)
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nxdx = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n}x\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx \\
&= \frac{4}{n^2}(-1)^n \qquad (31)
\end{aligned}
$$

$$
b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin nxdx \underbrace{=}_{\text{奇関数}} 0 \qquad (32)
$$

$$
\therefore (30),(31),(32) \implies x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^\infty\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx \qquad (33)
$$

フーリエ級数の公式より、係数 a_0 は $1/2$ したものを足していることに注意しよう。ここに $x = \pi$ を代入すると

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^{2n} \implies \frac{2\pi^2}{3} = 4\zeta(2) \implies \therefore \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \tag{34}$$

を得る。これはバーゼルの問題と呼ばれており、他にも解法が存在する。
同様に $y = x^4$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ が繰り返されている周期関数をフーリエ級数で表現することを考える。

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{5\pi}[x^5]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^4}{5} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^4 \sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin nx dx = \frac{4}{n\pi}\left[\frac{1}{n}x^3 \cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{12}{n^2}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx}_{(31)} \\ &= \frac{8\pi^2}{n^2}(-1)^n - \frac{48}{n^4}(-1)^n \end{aligned} \tag{36}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin nx dx \underbrace{=}_{\text{奇関数}} 0 \tag{37}$$

$$\therefore (35), (36), (37) \implies x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{8\pi^2}{n^2}(-1)^n - \frac{48}{n^4}(-1)^n\right\}\cos nx \tag{38}$$

ここに $x = \pi$ を代入すると

$$\pi^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{8\pi^2}{n^2}(-1)^2 n - \frac{48}{n^4}(-1)^{2n}\right\} \implies \frac{4\pi^4}{5} = 8\pi^2\zeta(2) - 48\zeta(4) \implies \therefore \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \tag{39}$$

Appendix: Gaussian integral

折角なので、ガウス積分を復習しておこう。

$$2\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds \underbrace{=}_{\text{偶関数}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)}\right)^{1/2}$$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置換すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta r e^{-r^2} = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Bibliography

[1] 金子 昇, ”数理系のための基礎と応用 微分積分 II -理論を中心に-”

[2] 杉浦 光夫, ”解析入門 I”, 東京大学出版会

[3] 高橋健人, ”物理数学”, 新数学シリーズ 11, 培風館

[4] 福島 國光, ”2017 大学入試短期集中ゼミ数学 III”, 実教出版株式会社

[5] 福山 英敏, 小形 正男, ”物理数学 I”, 基礎物理学シリーズ 3

[6] 高校数学の美しい物語：http://mathtrain.jp/

[7] Wolfram MathWorld：http://mathworld.wolfram.com/