ガンマ関数とベータ関数

update: 2017 June 08, presented by Sho K. NAKAMURA

Gamma function

Gamma function の定義

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\ dt \tag{1}$$

から諸公式を導こう。

$$\Gamma(x) = \left[-e^{-t}t^{x-1}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-1)e^{-t}(x-1)t^{x-2}\ dt = (x-1)\Gamma(x-1) \tag{2}$$

特に $x = n$(正の整数) のとき、

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)\cdots 1\cdot\Gamma(1) = (n-1)!\int_0^\infty e^{-t}dt = (n-1)! \tag{3}$$

次に $x \to 1-x$ と置き換えると

$$\Gamma(1-x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{1-x-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{-x}dt = \left[-e^{-t}t^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-1)e^{-t}(-x)t^{-x-1}dt = -x\int_0^\infty e^{-t}t^{-x-1} = -x\Gamma(-x) \tag{4}$$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}dt \underbrace{=}_{t=s^2} \int_0^\infty e^{-s^2}s^{-1}2sds = 2\int_0^\infty e^{-s^2}ds$$

これはガウス積分 (Appendix 参照) より

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \tag{5}$$

という重要な値が導ける。(2), (5) 式より

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1/2) &= \int_0^\infty t^{n+1/2-1}e^{-t}dt = \left[-t^{n-1/2}e^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (n-1/2)t^{n-3/2}(-e^{-t})dt = (n-1/2)\int_0^\infty t^{n-1/2-1}e^{-t}dt \\ &= (n-1/2)\Gamma(n-1/2) = (n-1/2)(n-3/2)\Gamma(n-3/2) = \cdots = (n-1/2)(n-3/2)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(1/2) \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^n 2^n n!}\sqrt{\pi} \implies \therefore\ \Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} \end{aligned} \tag{6}$$

(5) 式を用いて

$$\Gamma(-1/2)=\int_0^\infty t^{-3/2}e^{-t}dt=\left[-2t^{-1/2}e^{-t}\right]_0^\infty-\int_0^\infty(-2)t^{-1/2}(-e^{-t})dt=-2\underbrace{\int_0^\infty t^{1/2-1}e^{-t}dt}_{=\Gamma(1/2)}=-2\sqrt{\pi} \tag{7}$$

と導出できる。(4), (7) 式より

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2-n) &= \Gamma(-(n-1/2))\underbrace{=}_{(4)}\frac{-1}{n-1/2}\Gamma(1-(n-1/2))=\frac{-2}{2n-1}\Gamma(3/2-n)=\frac{-2}{2n-1}\frac{-2}{2n-3}\Gamma(5/2-n)\\ &= \cdots=\frac{(-1)^n2^n}{(2n-1)(2n-3)\cdot3\cdot1}\Gamma(1/2)=\frac{(-1)^n2^{2n}n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}\end{aligned} \tag{8}$$

も計算できる。

Beta function と Gamma function の関係式と公式

Beta function の定義

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{9}$$

(9) 式において $t=\sin^2\theta$ と置換すると、$dt=2\sin\theta\cos\theta\ d\theta$ より

$$B(x,y)=\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-2}\theta(1-\sin^2\theta)^{y-1}2\sin\theta\cos\theta\ d\theta=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\ d\theta \tag{10}$$

とも書ける。これを用いて gamma, beta function を結びつける公式を証明しよう。

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\int_0^\infty e^{-s}s^{x-1}ds$$

$t=T^2, s=S^2$ と置換すると

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-T^2}t^{2x-2}2T\ dT\int_0^\infty e^{-S^2}s^{2y-2}2S\ dS=4\int_0^\infty e^{-T^2}T^{2x-1}dT\int_0^\infty e^{-S^2}S^{2y-1}dS$$

これを 2 次元 TS 平面上の積分と考え、積分を極座標に直してやればよい。すなわち $T=r\cos\theta, S=r\sin\theta$ のようにして、積分範囲を $r:0\to\infty, \theta:0\to\pi/2$ とする。このとき $dTdS=rdrd\theta$ となることに注意しよう。すると

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\overbrace{2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2x+2y-1}dr}^{R=r^2\text{ と置換}}\underbrace{2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\ d\theta}_{(10)}=\underbrace{\int_0^\infty e^{-R}R^{(x+y)-1}dR}_{(1)}\ B(x,y)=\Gamma(x+y)B(x,y)$$

$$\therefore\ B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=B(y,x) \tag{11}$$

という公式が導けた。(11) 式に $x = z, y = 1 - z$ を代入すると

$$\underbrace{\frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(z+1-z)}}_{=1} = B(z, 1-z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z} dt \tag{12}$$

$u = t(1-t)^{-1}$ と置くと $dt = du/(1+u)^2$ より

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{1+u}{u} u^{-z} \frac{du}{(1+u)^2} = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u} du \tag{13}$$

これを求めるために、$f(v) = \dfrac{v^{z-1}}{1-v}$ を複素数平面上の fig1 のような経路で積分する。$0 < z < 1$ のとき $v = 0$ が特異点であり、この点における留数は $\mathrm{Res}(v^{z-1}/(1-v)) = 1$ である。留数定理より

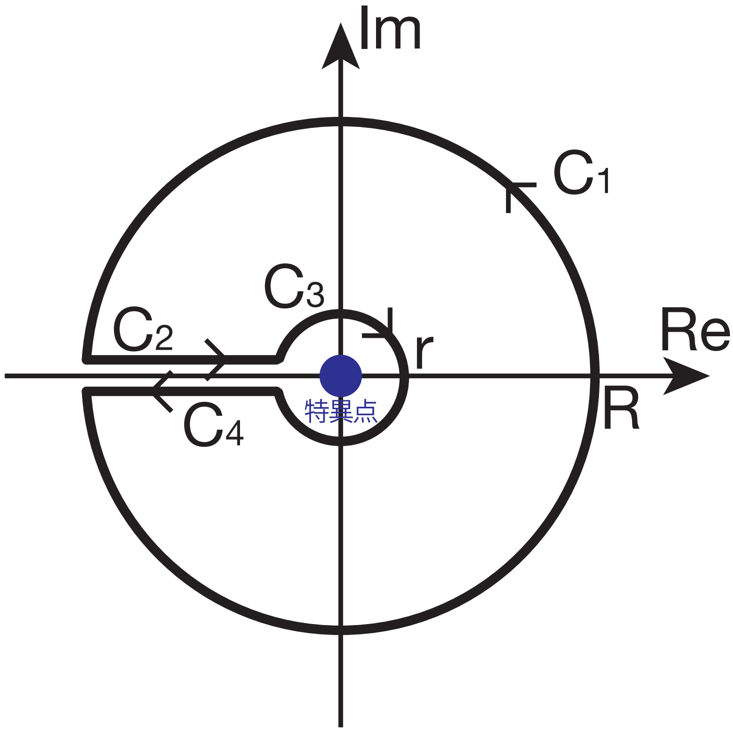

fig 1: 複素平面上での積分経路。

$$\oint_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(v) dv \underbrace{=}_{\text{時計回りなのでマイナス}} -2\pi i \tag{14}$$

$$\int_{C_1} \frac{v^{z-1}}{1-v} dv \underbrace{=}_{v \to Re^{i\theta}} \int_{-\pi}^{pi} \frac{(Re^{i\theta})^{z-1}}{1-Re^{i\theta}} Re^{i\theta} d\theta \overset{R\to\infty}{\Longrightarrow} 0 \tag{15}$$

$$\int_{C_2} \frac{v^{z-1}}{1-v} dv = \int_{-R}^{-r} \frac{v^{z-1}}{1-v} dv \underbrace{=}_{v=-u=ue^{i\pi}} \int_r^R \frac{u^{z-1}}{1+u} e^{i(z-1)\pi} du \tag{16}$$

$$\int_{C_3} \frac{v^{z-1}}{1-v} dv \underbrace{=}_{v \to re^{i\theta}} \int_{-\pi}^{pi} \frac{(re^{i\theta})^{z-1}}{1-re^{i\theta}} re^{i\theta} d\theta \overset{r\to 0}{\Longrightarrow} 0 \tag{17}$$

$$\int_{C_4} \frac{v^{z-1}}{1-v} dv = \int_{-r}^{-R} \frac{v^{z-1}}{1-v} dv \underbrace{=}_{v=-u=ue^{-i\pi}} \int_r^R \frac{u^{z-1}}{1+u} e^{-iz\pi} du \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
-2\pi i &= \oint_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(v)dv \overbrace{=}^{r\to 0, R\to\infty} \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u} du(e^{i(z-1)\pi} + e^{-iz\pi}) = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u} du(-e^{iz\pi} + e^{-iz\pi}) \\
&= -2i \sin(z\pi) \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u} du
\end{aligned} \tag{19}$$

$$(13), (19) \implies -2i \sin(\pi z) \Gamma(z)\Gamma(1-z) = -2\pi i \implies \therefore \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{20}$$

$\sin^n$ の定積分の公式

さらに有用な積分公式を導出しよう。(10), (11) 式より

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{21}$$

これに $x = (n+1)/2, y = 1/2$ を代入すればよい。

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma((n+1)/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n/2+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)} \tag{22}$$

さらに

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^n\theta \, d\theta &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)} + \underbrace{\int_{\pi/2}^\pi \sin^n\theta \, d\theta}_{\Theta=\theta-\pi/2 \text{ と置換}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)} + \int_0^{\pi/2} \sin^n(\Theta + \pi/2) \, d\Theta \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)} + \int_0^{\pi/2} \cos^n\Theta \, d\Theta
\end{aligned}$$

(21) 式に今度は $x = 1/2, y = (n+1)/2$ を代入すれば $\cos^n\Theta$ の積分結果が求まる。結果は (22) と同じとなることがわかるだろう。

$$\therefore \int_0^\pi \sin^n\theta \, d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2+1)} \tag{23}$$

と求まる。実はこの式は、シンクロトロン放射強度を求めるときに使用する公式でもある。導出方法はともかくとして、電波天文学や磁場に関わる天体物理現象を扱う方々にはぜひとも覚えておいていただきたい。

Appendix: Gaussian integral

折角なので、ガウス積分を復習しておこう。

$$2\int_0^\infty e^{-s^2}ds \underbrace{=}_{\text{偶関数}} \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}ds = \left(\int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy e^{-(x^2+y^2)}\right)^{1/2}$$

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と置換すると、

$$\int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta r e^{-r^2} = 2\pi \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty = \pi$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-s^2}ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Bibliography

[1] 金子 昇, "数理系のための基礎と応用 微分積分 II -理論を中心に-"

[2] 杉浦 光夫, "解析入門 I", 東京大学出版会

[3] 福山 英敏, 小形 正男, "物理数学 I", 基礎物理学シリーズ 3